ББК 22.151.5я73

Краснов Михаил Леонтьевич,
Киселев Александр Иванович,
Макаренко Григорий Иванович

Векторный анализ: Задачи и примеры с подробными решениями:
Учебное пособие. Изд. 2-е., испр. — М.: Едиториал УРСС, 2002. — 144 с.
(Вся высшая математика в задачах.)

ISBN 5-354-00014-9

Предлагаемый сборник задач можно рассматривать как краткий курс векторного анализа, в котором сообщаются без доказательства основные факты с иллюстрацией их на конкретных примерах. Поэтому предлагаемый задачник может быть использован, с одной стороны, для повторения основ векторного анализа, а с другой — как учебное пособие для лиц, которые, не вдаваясь в доказательства тех или иных предложений и теорем, хотят овладеть техникой операций векторного анализа. При составлении задачника авторы использовали материал, содержащийся в имеющихся курсах векторного исчисления и сборниках задач. Значительная часть задач составлена самими авторами.

В начале каждого параграфа приводится сводка основных теоретических положений, определений и формул, а также дается подробное решение 100 примеров. В книге содержится более 300 задач и примеров для самостоятельного решения. Все они снабжены ответами или указаниями к решению. Имеется некоторое количество задач прикладного характера, которые выбраны так, чтобы их разбор не требовал от читателя дополнительных сведений из специальных дисциплин. Материал шестой главы, посвященной криволинейным координатам и основным операциям векторного анализа в криволинейных координатах, внесен в книгу из тех соображений, чтобы дать читателю хотя бы минимальное количество задач для приобретения необходимых навыков.

Сборник задач рассчитан на студентов дневных и вечерних отделений технических вузов, инженеров, а также на студентов-заочников, знакомых с векторной алгеброй и математическим анализом в объеме первых двух курсов.

Издательство «Едиториал УРСС». 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, д. 9.
Лицензия ИД №05175 от 25.06.2001 г. Подписано к печати 2.02.2002 г.
Формат 60×90/16. Тираж 3000 экз. Печ. л. 9

Отпечатано в типографии ИПО «Профиздат». 109044, г. Москва, Крутицкий вал, 18.

ИЗДАТЕЛЬСТВО УРСС
НАУЧНОЙ И УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
E-mail: urss@urss.ru
Каталог изданий
в Internet: http://urss.ru
Тел/факс: 7 (095) 135-44-23
Тел/факс: 7 (095) 135-42-46

ISBN 5-354-00014-9

ГЛАВА
1
Вектор-функция скалярного аргумента

§ 1. Годограф вектор-функции

Определение 1. Вектор $\mathbf{r}$ называется *вектор-функцией* скалярного аргумента t, если каждому значению скаляра из области допустимых значений соответствует определенное значение вектора $\mathbf{r}$. Будем это записывать так:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t).$$

Если вектор $\mathbf{r}$ является функцией скалярного аргумента t

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t),$$

то координаты x, y, z вектора $\mathbf{r}$ также будут функциями аргумента t:

$$x = z(t)$$
$$y = y(t),$$
$$z = z(t).$$

Обратно, если координаты вектора $\mathbf{r}$ являются функциями t, то функцией t будет и сам вектор $\mathbf{r}$:

$$\mathbf{r} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}.$$

Таким образом, задание вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ равносильно заданию трех скалярных функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

Определение 2. *Годографом* вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ скалярного аргумента называется геометрическое место точек, которое описывает конец вектора $\mathbf{r}(t)$ при изменении скаляра t, когда начало вектора $\mathbf{r}(t)$ помещено в фиксированную точку O пространства (рис. 1).

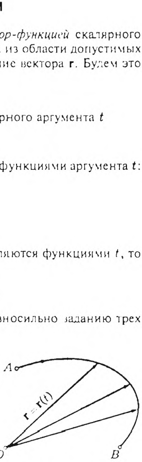

Рис. 1

Годографом радиуса-вектора $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ движущейся точки будет сама траектория L этой точки. Годографом скорости $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ этой точки будет некоторая другая линия L_1 (рис. 2). Так, если материальная точка движется по окружности с постоянной скоростью $|\mathbf{v}| = \text{const}$, то ее годограф скоростей также представляет собой окружность с центром в точке O_1 и с радиусом равным $|\mathbf{v}|$.

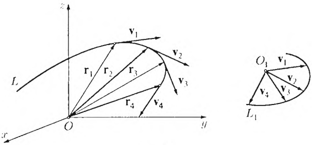

Рис. 2

Пример 1. Построить годограф вектора $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$.

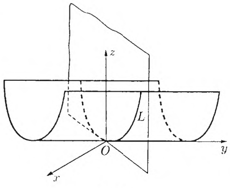

Рис. 3

Решение. 1. Это построение можно вести по точкам, составляя таблицу:

t	$\mathbf{r}$
0	0
1	$\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$
2	$2\mathbf{i}+2\mathbf{j}+4\mathbf{k}$
3	$3\mathbf{i}+3\mathbf{j}+9\mathbf{k}$
4	$4\mathbf{i}+4\mathbf{j}+16\mathbf{k}$

2. Можно поступить и так. Обозначив через x, y, z координаты вектора $\mathbf{r}$, будем иметь

$$x = t, \quad y = t, \quad z = t^2.$$

Исключая из этих уравнений параметр t, получим уравнения поверхностей $y = x$, $z = x^2$, линия пересечения L которых и определит годограф вектора $\mathbf{r}(t)$ (рис. 3). ▷

Задачи для самостоятельного решения

1. Построить годографы векторов:

а) $\mathbf{r} = 2\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} - t^2\mathbf{k}$; б) $\mathbf{r} = \dfrac{t^2+1}{(t+1)^2}\mathbf{i} + \dfrac{2t}{(t+1)^2}\mathbf{j}$;

в) $\mathbf{r} = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$; г) $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + \dfrac{1}{3}t^2\mathbf{j} + \dfrac{1}{9}t^3\mathbf{k}$; д) $\mathbf{r} = \dfrac{2t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + (t^2-2)\mathbf{k}}{t^2+2}$.

§ 2. Предел и непрерывность вектор-функции скалярного аргумента

Пусть вектор-функция $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ скалярного аргумента t определена в некоторой окрестности значения t_0 аргумента t, кроме, быть может, самого значения t_0.

Определение 1. Постоянный вектор $\mathbf{A}$ называется *пределом* вектора $\mathbf{r}(t)$ при $t \to t_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $t \neq t_0$, удовлетворяющих условию $|t - t_0| < \delta$, выполняется неравенство

$$|\mathbf{r}(t) - \mathbf{A}| < \varepsilon.$$

Как и в обычном анализе, пишут $\lim\limits_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{A}$.

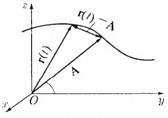

Рис. 4

Геометрически это означает, что вектор $\mathbf{r}(t)$ при $t \to t_0$ стремится к вектору $\mathbf{A}$ как по длине, так и по направлению (рис. 4).

Определение 2. Вектор $\boldsymbol{\alpha}(t)$ называется *бесконечно малым* при $t \to t_0$, если $\boldsymbol{\alpha}(t)$ имеет предел при $t \to t_0$ и этот предел равен нулю:

$$\lim_{t \to t_0} \boldsymbol{\alpha}(t) = 0,$$

или, что то же, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $t \neq t_0$, удовлетворяющих условию $|t - t_0| < \delta$, выполняется неравенство $|\boldsymbol{\alpha}(t)| < \varepsilon$.

Пример 1. Показать, что вектор $\boldsymbol{\alpha}(t) = t\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j}$ есть бесконечно малый вектор при $t \to 0$.

<u>Решение</u>. Имеем

$$|\boldsymbol{\alpha}(t)| = |t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j}| \leqslant |t| + |\sin t| \leqslant 2|t|,$$

откуда видно, что если для всякого $\varepsilon > 0$ взять $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$, то при $|t - 0| < \delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ будем иметь $|\boldsymbol{\alpha}(t)| < \varepsilon$. Согласно определению это означает, что $\boldsymbol{\alpha}(t)$ есть бесконечно малый вектор при $t \to 0$. ▷

Задачи для самостоятельного решения

2. Показать, что предел модуля вектора равен модулю его предела, если последний предел существует.

3. Доказать, что для того чтобы вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ имела при $t \to t_0$ предел $\mathbf{A}$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathbf{r}(t)$ можно было представить в виде

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{A} + \boldsymbol{\alpha}(t),$$

где $\boldsymbol{\alpha}(t)$ — бесконечно малый при $t \to t_0$ вектор.

4. Показать, что если вектор-функции $\mathbf{a}(t)$ и $\mathbf{b}(t)$ имеют при $t \to t_0$ пределы:

$$\lim_{t\to t_0} \mathbf{a}(t) = \mathbf{A}, \quad \lim_{t\to t_0} \mathbf{b}(t) = \mathbf{B},$$

то их сумма $\mathbf{a}(t) + \mathbf{b}(t)$ и разность $\mathbf{a}(t) - \mathbf{b}(t)$ также имеют пределы при $t \to t_0$, причем

$$\lim_{t\to t_0} [\mathbf{a}(t) \pm \mathbf{b}(t)] = \mathbf{A} \pm \mathbf{B}.$$

5. Пусть

$$\lim_{t\to t_0} \mathbf{a}(t) = \mathbf{A}, \quad \lim_{t\to t_0} \mathbf{b}(t) = \mathbf{B}.$$

Доказать, что

$$\lim_{t\to t_0} (\mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t)) = (\mathbf{A}, \mathbf{B}),$$

где $(\mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t))$ — скалярное произведение вектор-функций $\mathbf{a}(t)$ и $\mathbf{b}(t)$.

6. Пусть

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad \mathbf{A} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}.$$

Показать, что если $\lim\limits_{t\to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{A}$, то

$$\lim_{t\to t_0} x(t) = a_1, \quad \lim_{t\to t_0} y(t) = a_2, \quad \lim_{t\to t_0} z(t) = a_3.$$

Найти следующие пределы:

7. $\lim\limits_{t\to 0} \left(\dfrac{\sin t}{t}\mathbf{i} + \dfrac{\cos t - 1}{2t}\mathbf{j} + e^{t^2}\mathbf{k}\right)$.

8. $\lim\limits_{t\to 0} \left(\dfrac{1-\sqrt{t}}{1-t}\mathbf{i} + \dfrac{t}{1+t}\mathbf{j} + \mathbf{k}\right)$.

9. $\lim\limits_{t\to \pi} \left(\dfrac{\sin t}{t}\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + \dfrac{1}{t+\pi}\mathbf{k}\right)$.

10. $\lim\limits_{t\to \pi} \left(\dfrac{\sin t}{t-\pi}\mathbf{i} + \dfrac{1+\cos t}{t}\mathbf{j} + \dfrac{t}{\pi}\mathbf{k}\right)$.

11. $\lim\limits_{t\to 1} \left(\dfrac{e^t - e}{t-1}\mathbf{i} + \dfrac{\ln t}{1-t}\mathbf{j} + 2\mathbf{k}\right)$.

Определение 3. Вектор-функция $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, определенная в некоторой окрестности значения $t = t_0$, называется *непрерывной* при $t = t_0$, если

$$\lim_{t\to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0).$$

Иными словами, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ непрерывна при $t = t_0$, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех t, удовлетворяющих условию $|t - t_0| < \delta$, верно неравенство $|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)| < \varepsilon$.

Годографом непрерывной вектор-функции скалярного аргумента является непрерывная кривая.

Задачи для самостоятельного решения

12. Исходя из известного неравенства $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| \geqslant \big||\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|\big|$, показать, что непрерывность вектор-функции влечет за собой непрерывность ее модуля. Верно ли обратное предложение?

13. Показать, что если $\mathbf{a}(t)$ и $\mathbf{b}(t)$ непрерывны при $t = t_0$, то вектор-функция $\mathbf{a}(t) + \mathbf{b}(t)$ также непрерывна при $t = t_0$.

14. Вектор-функция $\mathbf{a}(t)+\mathbf{b}(t)$ непрерывна при $t=t_0$. Следует ли отсюда, что векторы $\mathbf{a}(t)$ и $\mathbf{b}(t)$ также непрерывны при $t=t_0$?
15. Доказать, что если $\mathbf{a}(t)$ и $\mathbf{b}(t)$ — непрерывные вектор-функции, то их скалярное произведение $(\mathbf{a}(t),\mathbf{b}(t))$ и векторное произведение $[\mathbf{a}(t),\mathbf{b}(t)]$ также непрерывны.

§ 3. Производная вектор-функции по скалярному аргументу

Пусть вектор-функция $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ определена для всех t из интервала (t_0,t_1). Возьмем некоторое значение $t\in(t_0,t_1)$, дадим t приращение Δt такое, чтобы $t+\Delta t\in(t_0,t_1)$ и найдем соответствующее приращение $\Delta\mathbf{r}=\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)$ вектор-функции $\mathbf{r}(t)$. Рассмотрим далее отношение $\dfrac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$.

Определение. Если при $\Delta t\to 0$ отношение $\dfrac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$ имеет предел, то этот предел называется *производной* вектор-функции $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ по скалярному аргументу t при данном значении t аргумента и обозначается $\dfrac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$ (а также $\mathbf{r}'(t)$ или $\dot{\mathbf{r}}(t)$). Таким образом,

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)}{\Delta t}.$$

В этом случае вектор-функция $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ называется *дифференцируемой*.

Задача для самостоятельного решения

16. Показать, что если вектор-функция $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ имеет производную при некотором значении t аргумента, то она непрерывна при этом значении t.

Производная вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ скалярного аргумента t есть вектор, направленный по касательной к годографу исходного вектора в рассматриваемой точке (рис. 5). При этом вектор $\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$ направлен в ту сторону, куда перемещается конец вектора $\mathbf{r}(t)$ по годографу когда параметр t растет.

Пусть $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ есть радиус-вектор движущейся точки. Тогда вектор $\mathbf{v}=\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$ есть вектор скорости этой точки.

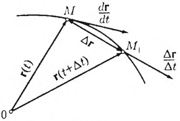

Рис. 5

Пусть

$$\mathbf{r}(t)=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}+z(t)\mathbf{k},$$

где функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ дифференцируемы в точке t. Тогда существует $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ при этом значении t и

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}. \tag{1}$$

Пример 1. Найти $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$, если $\mathbf{r} = a\cos t\,\mathbf{i} + b\sin t\,\mathbf{j}$ (точка движется по эллипсу).

Решение. По формуле (1)

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -a\sin t\,\mathbf{i} + b\cos t\,\mathbf{j}.$$

По аналогии с дифференциалом скалярной функции *дифференциал вектор-функции* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ есть вектор $d\mathbf{r}$, определяемый равенством

$$d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\,dt,$$

где $dt = \Delta t$ — приращение скалярного аргумента t.

Как и для скалярных функций,

$$\Delta\mathbf{r} = d\mathbf{r} + \alpha\Delta t,$$

где $\alpha = \alpha(t, \Delta t)$ при $\Delta t \to 0$. ▷

Основные правила дифференцирования вектор-функций

Предположим, что все рассматриваемые функции (как скалярные, так и векторные) непрерывны и дифференцируемы.

1. Если $\mathbf{c}$ — постоянный вектор, то $\frac{d\mathbf{c}}{dt} = 0$.
2. Производная суммы вектор-функций равна сумме производных слагаемых
$$\frac{d(\mathbf{a}(t) + \mathbf{b}(t))}{dt} = \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \frac{d\mathbf{b}}{dt}.$$
3. Пусть вектор-функция $\mathbf{a}(t)$ умножается на скалярную функцию $m(t)$ того же скалярного аргумента. Тогда
$$\frac{d(m\mathbf{a})}{dt} = m\frac{d\mathbf{a}}{dt} + \frac{dm}{dt}\mathbf{a}.$$
4. $$\frac{d(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{dt} = \left(\mathbf{a}, \frac{d\mathbf{b}}{dt}\right) + \left(\frac{d\mathbf{a}}{dt}, \mathbf{b}\right).$$
5. $$\frac{d[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}{dt} = \left[\frac{d\mathbf{a}}{dt}, \mathbf{b}\right] + \left[\mathbf{a}, \frac{d\mathbf{b}}{dt}\right].$$

(В этой формуле в правой части надо соблюдать тот же порядок множителей $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, что и в левой части.)

Докажем, например, формулу 4. Положим $\varphi(t) = (\mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t))$. Дадим t приращение Δt; будем иметь в силу распределительного свойства для скалярного произведения

$$\Delta\varphi = \varphi(t + \Delta t) - \varphi(t) = (\mathbf{a} + \Delta\mathbf{a}, \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}) - (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\Delta\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{a}, \Delta\mathbf{b}) + (\Delta\mathbf{a}, \Delta\mathbf{b}).$$

Отсюда

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \left(\frac{\Delta\mathbf{a}}{\Delta t}, \mathbf{b}\right) + \left(\mathbf{a}, \frac{\Delta\mathbf{b}}{\Delta t}\right) + \left(\frac{\Delta\mathbf{a}}{\Delta t}, \Delta\mathbf{b}\right). \tag{2}$$

По условию функции $\mathbf{a}(t)$ и $\mathbf{b}(t)$ имеют производные при значении t аргумента и, значит, непрерывны при этом значении t. Поэтому

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{a}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{a}}{dt}, \quad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{b}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{b}}{dt}, \quad \lim_{\Delta t \to 0} \Delta\mathbf{b} = 0.$$

Переходя в (2) к пределу при Δt, получим

$$\frac{d(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{a}}{dt}, \mathbf{b}\right) + \left(\mathbf{a}, \frac{d\mathbf{b}}{dt}\right).$$

Задачи для самостоятельного решения

17. Дано $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Найти производные

$$\text{а)}\ \frac{d}{dt}(\mathbf{r}^2); \quad \text{б)}\ \frac{d}{dt}\left(\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right); \quad \text{в)}\ \frac{d}{dt}\left[\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right].$$

18. Доказать, что если модуль $|\mathbf{r}|$ вектор-функции $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ остается постоянным для всех значений t, то $\dfrac{d\mathbf{r}}{dt} \perp \mathbf{r}$. Каков геометрический смысл этого факта?

19. Доказать, что если $\mathbf{e}$ — единичный вектор в направлении вектора $\mathbf{E}$, то

$$[\mathbf{e}, d\mathbf{e}] = \frac{[\mathbf{E}, d\mathbf{E}]}{|E|^2}.$$

20. Пусть

$$\mathbf{u} = u_1(x, y, z, t)\mathbf{i} + u_2(x, y, z, t)\mathbf{j} + u_3(x, y, z, t)\mathbf{k},$$

где u_1, u_2, u_3 — непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов, а x, y, z — непрерывно дифференцируемые функции от t. Показать, что

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

21. Найти траекторию движения, для которого радиус-вектор $\mathbf{r}(t)$ движущейся точки удовлетворяет условию $\dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = [\mathbf{a}\ \mathbf{r}]$, где $\mathbf{a}$ — постоянный вектор.

Производная $\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$ вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ скалярного аргумента является вектор-функцией того же аргумента. Если существует производная

от $\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$, то она называется *производной второго порядка* и обозначается $\dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$.
Вообще

$$\frac{d^n\mathbf{r}}{dt^n} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d^{n-1}\mathbf{r}}{dt^{n-1}}\right), \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Задачи для самостоятельного решения

22. Дан радиус-вектор движущейся в пространстве точки

$$\mathbf{r}\{a\sin t, \quad -a\cos t, \quad bt^2\}$$

(t — время, a и b — постоянные). Найти годографы скорости и ускорения.

23. Дано: $\mathbf{r} = \mathbf{a}\cos\omega t + \mathbf{b}\sin\omega t$, где $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ — постоянные векторы. Доказать, что

$$1)\ \left[\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right] = [\omega\mathbf{a}, \mathbf{b}]; \qquad 2)\ \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \omega^2\mathbf{r} = 0.$$

24. Показать, что если $\mathbf{r} = \mathbf{a}e^{\omega t} + \mathbf{b}e^{-\omega t}$, где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — постоянные векторы, то

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} - \omega^2\mathbf{r} = 0.$$

25. Показать, что модуль дифференциала радиуса-вектора точки равен дифференциалу длины дуги, описываемой этой точкой.

26. Пусть $\mathbf{a} = \mathbf{a}(u)$ есть вектор-функция скаляра u, где u в свою очередь есть некоторая скалярная функция от основного скаляра t. Предполагая $\mathbf{a}(u)$ и $u = u(t)$ дифференцируемыми нужное число раз, найти выражение для производных сложной функции $\dfrac{d\mathbf{a}}{dt}$, $\dfrac{d^2\mathbf{a}}{dt^2}$.

§ 4. Интегрирование вектор-функции скалярного аргумента

Определение 1. Будем называть вектор-функцию $\mathrm{A}(t)$ *первообразной функцией* для вектор-функции $\mathrm{a}(t)$ при $t_0 < t < t_1$, если $\mathrm{A}(t)$ дифференцируема и

$$\frac{d\mathrm{A}}{dt} = \mathrm{a}(t), \quad t \in (t_0, t_1).$$

Определение 2. *Неопределенным интегралом* от вектор-функции скалярного аргумента $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ называется совокупность всех первообразных для $\mathbf{a}(t)$. Неопределенный интеграл от вектор-функции, как и в интегральном исчислении, обозначается знаком $\int$. Имеем

$$\int \mathrm{a}(t)\,dt = \mathrm{A}(t) + \mathrm{C},$$

где $\mathrm{A}(t)$ — какая-нибудь из первообразных для $\mathbf{a}(t)$, C — произвольный постоянный вектор.

Для интегралов от вектор-функций справедливы следующие свойства:

1. $\int \alpha\, \mathbf{a}(t)\, dt = \alpha \int \mathbf{a}(t)\, dt$ (α — числовая постоянная).
2. $\int (\mathbf{a}(t) \pm \mathbf{b}(t))\, dt = \int \mathbf{a}(t)\, dt \pm \int \mathbf{b}(t)\, dt$.

Задача для самостоятельного решения

27. Показать, что если $\mathbf{c}$ — постоянный вектор, $\mathbf{a}(t)$ — переменный вектор, то

$$\int (\mathbf{c}, \mathbf{a}(t))\, dt = \left(\mathbf{c}, \int \mathbf{a}(t)\, dt\right),$$

$$\int [\mathbf{c}, \mathbf{a}(t)]\, dt = \left[\mathbf{c}, \int \mathbf{a}(t)\, dt\right].$$

Если

$$\mathbf{a}(t) = a_1(t)\mathbf{i} + a_2(t)\mathbf{j} + a_3(t)\mathbf{k},$$

то

$$\int \mathbf{a}(t)\, dt = \mathbf{i} \int a_1(t)\, dt + \mathbf{j} \int a_2(t)\, dt + \mathbf{k} \int a_3(t)\, dt, \qquad (1)$$

т. е. интегрирование вектор-функции сводится к трем обычным интегрированиям.

Пример 1. Найти неопределенный интеграл от вектор-функции $\mathbf{a}(t) = \mathbf{i}\cos t + \mathbf{j}e^{-t} + \mathbf{k}$.

Решение. Согласно формуле (1)

$$\int \mathbf{a}(t)\, dt = \mathbf{i} \int \cos t\, dt + \mathbf{j} \int e^{-t}\, dt + \mathbf{k} \int dt = \mathbf{i}\sin t - \mathbf{j}e^{-t} + \mathbf{k}t + \mathbf{c},$$

где $\mathbf{c}$ — произвольный постоянный вектор. ▷

Задачи для самостоятельного решения

Найти интегралы от следующих вектор-функций:

28. $\mathbf{a}(t) = te^t\mathbf{i} + \sin^2 t\,\mathbf{j} - \dfrac{1}{1+t^2}\mathbf{k}$.

29. $\mathbf{a}(t) = \dfrac{t}{1+t^2}\mathbf{i} + te^{t^2}\mathbf{j} + \cos t\,\mathbf{k}$.

30. $\mathbf{a}(t) = \cos t\, e^{\sin t}\mathbf{i} - t\cos t^2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

31. $\mathbf{a}(t) = \dfrac{1}{2}t^2\mathbf{i} - t\sin t\,\mathbf{j} + 2^t\mathbf{k}$.

Пусть вектор-функция $\mathbf{a}(t)$ определена и непрерывна на некотором отрезке $[t_0, T]$ изменения аргумента t.

Определение 3. *Определенным интегралом* от вектор-функции $\mathbf{a}(t)$ на отрезке $[t_0, T]$ называется предел векторных интегральных сумм

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{a}(\tau_k)\Delta t_k, \quad \tau_k \in [t_k, t_{k+1}],$$

при стремлении к нулю длины Δt наибольшего из отрезков $[t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, на которые разбит отрезок $[t_0, T]$:

$$\int_{t_0}^{T} \mathbf{a}(t)\,dt = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{a}(\tau_k)\Delta t_k.$$

Справедлива формула

$$\int_{t_0}^{T} \mathbf{a}(t)\,dt = \mathbf{A}(T) - \mathbf{A}(t_0), \tag{2}$$

где $\mathbf{A}(t)$ — какая-нибудь первообразная для функции $\mathbf{a}(t)$ и $[t_0, T]$.

Если

$$\mathbf{a}(t) = a_1(t)\mathbf{i} + a_2(t)\mathbf{j} + a_3(t)\mathbf{k},$$

то

$$\int_{t_0}^{T} \mathbf{a}(t)\,dt = \mathbf{i}\int_{t_0}^{T} a_1(t)\,dt + \mathbf{j}\int_{t_0}^{T} a_2(t)\,dt + \mathbf{k}\int_{t_0}^{T} a_3(t)\,dt. \tag{3}$$

Пример 2. Вычислить $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \mathbf{a}(t)\,dt$, где $\mathbf{a}(t) = \mathbf{i}\cos t - \mathbf{j}\sin^2 t$.

<ins>*Решение*</ins>. В силу формулы (3)

$$\int_0^{\pi/2} \mathbf{a}(t)\,dt = \mathbf{i}\int_0^{\pi/2} \cos t\,dt - \mathbf{j}\int_0^{\pi/2} \sin^2 t\,dt = \mathbf{i}\sin t\Big|_0^{\pi/2} - \mathbf{j}\left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right)\Big|_0^{\pi/2} = \mathbf{i} - \frac{\pi}{4}\mathbf{j}. \quad \triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить следующие интегралы:

32. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \mathbf{a}(t)\,dt$, где $\mathbf{a} = \sin^2 t\cos t\,\mathbf{i} + \cos^2 t\sin t\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

33. $\displaystyle\int_0^{1} \mathbf{a}(t)\,dt$, где $\mathbf{a} = \dfrac{e^{-t/2}}{2}\mathbf{i} + \dfrac{e^{t/2}}{2}\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}$.

34. $\int\limits_0^1 \mathbf{a}(t)\,dt$, где $\mathbf{a} = 3\pi\cos\pi t\,\mathbf{i} - \dfrac{1}{1+t}\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$.

35. $\int\limits_0^1 \mathbf{a}(t)\,dt$, где $\mathbf{a} = (2t+\pi)\mathbf{i} + t\sin t\,\mathbf{j} + \pi\mathbf{k}$.

Пример 3. Электрический ток силы I течет снизу вверх по бесконечному проводу, совпадающему с осью Oz. Найти вектор $\mathbf{H}$ напряженности магнитного поля, создаваемого этим током в произвольной точке $M(x, y, z)$ пространства (рис. 6).

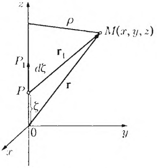

Рис. 6

Решение. Рассмотрим достаточно малый элемент $PP_1 = d\zeta$ оси Oz. По закону Био—Савара напряжение $d\mathbf{H}$ магнитного поля, создаваемого в точке M током, протекающим по элементу провода $d\zeta$, совпадает по направлению с векторным произведением $[d\boldsymbol{\zeta}, \mathbf{r}_1]$, где $d\boldsymbol{\zeta} = \overrightarrow{PP_1}$, $|d\boldsymbol{\zeta}| = d\zeta$, $\mathbf{r}_1 = \overrightarrow{PM}$. По этому же закону модуль вектора $d\mathbf{H}$ равен

$$|d\mathbf{H}| = \frac{I}{r_1^2}\sin\left(\widehat{d\boldsymbol{\zeta}, \mathbf{r}_1}\right) d\zeta,$$

где $\left(\widehat{d\boldsymbol{\zeta}, \mathbf{r}_1}\right)$ — угол, образованный векторами $d\boldsymbol{\zeta}$ и $\mathbf{r}_1$. Поскольку

$$\left|[d\boldsymbol{\zeta}, \mathbf{r}_1]\right| = r_1\,d\zeta\,\sin\left(\widehat{d\boldsymbol{\zeta}, \mathbf{r}_1}\right),$$

можно написать

$$d\mathbf{H} = \frac{I}{r_1^3}[d\boldsymbol{\zeta}, \mathbf{r}_1]. \tag{4}$$

Чтобы получить искомый вектор $\mathbf{H}$ в точке M, нужно просуммировать все векторы $d\mathbf{H}$, относящиеся к различным элементам PP_1 провода, т. е. проинтегрировать выражение (4) по всей оси Oz:

$$\mathbf{H} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{I}{r_1^3}[d\boldsymbol{\zeta}, \mathbf{r}_1]. \tag{5}$$

Имеем

$$\mathbf{r}_1 = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP}.$$

Но

$$\overrightarrow{OM} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad \overrightarrow{OP} = \zeta\mathbf{k},$$

поэтому

$$\mathbf{r}_1 = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (z-\zeta)\mathbf{k},$$

так что

$$r_1 = |\mathbf{r}_1| = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-\zeta)^2} = \sqrt{\rho^2 + (z-\zeta)^2},$$

где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ — расстояние от точки M до оси провода

Для векторного произведения $[d\zeta, \mathbf{r}_1]$ имеем

$$[d\zeta, \mathbf{r}_1] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & d\zeta \\ x & y & z-\zeta \end{vmatrix} = -\mathbf{i}y\,d\zeta + \mathbf{j}z\,d\zeta,$$

и формула (5) принимает вид (точка $M(x,y,z)$ фиксирована, $I = \text{const}$)

$$\mathbf{H} = I(-y\mathbf{i} + z\mathbf{j}) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\zeta}{[\rho^2 + (z-\zeta)^2]^{3/2}}. \tag{6}$$

Для вычисления интеграла в правой части (6) сделаем подстановку

$$\zeta - z = \rho \operatorname{tg} t, \quad d\zeta = \frac{\rho\,dt}{\cos^2 t}.$$

Будем иметь

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\zeta}{[\rho^2 + (z-\zeta)^2]^{3/2}} = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\rho\,dt}{\cos^2 t[\rho^2 + (z-\zeta)^2]^{3/2}} = \frac{1}{\rho^2} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t\,dt = \frac{2}{\rho^2}.$$

Итак, вектор напряженности $\mathbf{H}$ магнитного поля в нашем случае определяется формулой

$$\mathbf{H} = \frac{2I}{\rho^2}(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}), \quad \text{или} \quad \mathbf{H} = \frac{2}{\rho^2}[\mathbf{I}, \mathbf{r}],$$

где $\mathbf{I} = I \cdot \mathbf{k}$ — вектор тока, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки $M(x,y,z)$ поля, ρ — расстояние от точки M до оси провода. ▷

Пример 4 (движение электрона в однородном магнитном поле). Пусть в какой-либо области пространства создано магнитное поле $\mathbf{H}$, постоянное по величине и направлению (однородное поле). Пусть в момент времени $t = t_0$ в это поле попадает электрон с начальной скоростью $\mathbf{v}_0$. Определить траекторию электрона.

Решение. 1. Предположим сначала, что вектор $\mathbf{v}_0$ перпендикулярен к $\mathbf{H}$ и что начальное положение электрона — в точке M_0. Выберем начало O в произвольной точке плоскости P, проходящей через точку M_0 перпендикулярно вектору $\mathbf{H}$ (рис. 7). Начальный радиус-вектор $\overrightarrow{OM_0}$ пусть будет $\mathbf{r}_0$ и пусть $\mathbf{r}$ — радиус-вектор электрона в текущий момент времени t, а $\mathbf{v}$ — мгновенная скорость в этот момент. Основное дифференциальное уравнение движения

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}.$$

Сила $\mathbf{F}$, действующая в момент t на электрон со стороны магнитного поля, как известно, равна

$$\mathbf{F} = -e_0[\mathbf{H}, \mathbf{v}],$$

где e_0 — абсолютная величина заряда электрона. Таким образом,

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = e_0[\mathbf{v}, \mathbf{H}]. \tag{7}$$

Сила $\mathbf{F}$ в каждый момент t перпендикулярна к направлению скорости и к направлению поля $\mathbf{H}$; она будет заставлять электрон в каждый момент уклоняться от прямолинейного пути и описывать некоторую криволинейную траекторию.

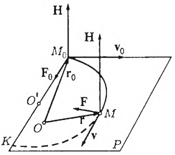

Рис. 7

Перепишем уравнение (7) в виде

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = e_0\left[\frac{d\mathbf{r}}{dt}, \mathbf{H}\right]$$

и проинтегрируем его по t от t_0 до t. Получим

$$m\mathbf{v} - m\mathbf{v}_0 = e_0[\mathbf{r}, \mathbf{H}] - e_0[\mathbf{r}_0, \mathbf{H}],$$

или

$$m\mathbf{v} = e_0[\mathbf{r}, \mathbf{H}] + (m\mathbf{v}_0 - e_0[\mathbf{r}_0, \mathbf{H}]). \tag{8}$$

Выберем теперь начало координат O' так, чтобы обратилось в нуль слагаемое, стоящее в круглых скобках в правой части (8), т. е. чтобы

$$e_0[\mathbf{r}_0, \mathbf{H}] = m\mathbf{v}_0. \tag{9}$$

Из (9) следует, что начальный вектор $\mathbf{r}_0$ должен быть перпендикулярен к вектору $\mathbf{v}_0$ и лежать на прямой M_0K, перпендикулярной к плоскости векторов $\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{H}$. Модуль вектора $\mathbf{r}_0$ в силу (9) должен удовлетворять соотношению

$$e_0|\mathbf{r}_0| \cdot |\mathbf{H}| = m|\mathbf{v}_0|,$$

откуда

$$|\mathbf{r}_0| = \frac{m|\mathbf{v}_0|}{e_0|\mathbf{H}|}. \tag{10}$$

Этим положение нового начала O' определено. Относительно него уравнение (8) перепишется так:

$$m\mathbf{v} = e_0[\mathbf{r}, \mathbf{H}], \tag{11}$$

или

$$m\frac{d\mathbf{r}}{dt} = e_0[\mathbf{r}, \mathbf{H}]. \tag{12}$$

Из уравнения (11) вытекает, что траекторией электрона будет плоская кривая, лежащая в плоскости P, так как вектор $\mathbf{v}$ в каждый момент времени перпендикулярен к $\mathbf{H}$. Умножим теперь обе части уравнения (12) скалярно на $\mathbf{r}$:

$$m\left(\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) = e_0(\mathbf{r}, [\mathbf{r}, \mathbf{H}]). \tag{13}$$

Смешанное произведение в правой части (13) равно нулю, так что

$$\left(\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) = 0.$$

Отсюда

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}^2) = 0, \quad \text{или} \quad \frac{d}{dt}(r^2) = 0, \quad \text{т. е.} \quad r^2 = \text{const}.$$

Это — уравнение окружности, лежащей в плоскости P, с центром в выбранной нами точке O'. Радиус этой окружности определяется формулой (10), поскольку начальная точка M_0 также должна лежать на этой окружности. Итак, окончательно

$$r = r_0 = \frac{m|\mathbf{v}_0|}{e_0|\mathbf{H}|}. \tag{10}$$

Таким образом, если электрон попадает в однородное магнитное поле $\mathbf{H}$ с начальной скоростью $\mathbf{v}_0$, перпендикулярной к $\mathbf{H}$, то он будет описывать в этом поле круговую траекторию, лежащую в плоскости P, перпендикулярной к $\mathbf{H}$ и проходящей через начальную точку. Радиус этой окружности определяется формулой (10), а ее центр O' лежит на прямой, перпендикулярной к плоскости векторов $\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{H}$, причем из точки O' поворот от $\mathbf{v}_0$ к $\mathbf{H}$ должен быть виден против часовой стрелки.

Из формулы (10) видно, что радиус $\mathbf{r}_0$ окружности обратно пропорционален $|\mathbf{H}|$. Таким образом, чем сильнее напряженность магнитного поля, тем больше кривизна траектории.

Из формулы (11)

$$m\mathbf{v} = e_0[\mathbf{r}, \mathbf{H}]$$

видно, что если $\mathbf{r}$ постоянен по модулю и все время перпендикулярен к $\mathbf{H}$, то и скорость $\mathbf{v}$ точки будет постоянна по величине:

$$|\mathbf{v}| = v_0 = \text{const},$$

так что электрон движется по орбите равномерно. Период обращения T равен

$$T = \frac{2\pi r_0}{v_0} = 2\pi\frac{m}{e_0|\mathbf{H}|}. \tag{14}$$

В эту формулу не входит начальная скорость $\mathbf{v}_0$. Таким образом, с какой бы начальной скоростью $\mathbf{v}_0$, перпендикулярной к $\mathbf{H}$, ни попал электрон в однородное магнитное поле $\mathbf{H}$, он будет совершать один оборот по орбите всегда за одно и то же время T, независимо от величины v_0.

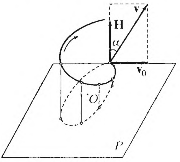

Рис. 8

2. Пусть теперь электрон попадает в однородное магнитное поле $\mathbf{H}$ с какой-либо начальной скоростью $\mathbf{V}$, которая не перпендикулярна вектору $\mathbf{H}$. Тогда эту скорость $\mathbf{V}$ можно разложить на две составляющие: вектор $\mathbf{v}_0$, направленный перпендикулярно полю, и вектор $\mathbf{v}_1$, направленный вдоль магнитного поля.

Из формулы

$$\mathbf{F} = e[\mathbf{V}, \mathbf{H}] = e_0[\mathbf{v}_0, \mathbf{H}]$$

видно, что «закручивающая» сила $\mathbf{F}$ будет определяться только перпендикулярной составляющей $\mathbf{v}_0$ и она сообщит электрону вращательное движение по кругу с центром в O', рассмотренное выше. Что касается второй составляющей $\mathbf{v}_1$, то электрон сохранит ее по инерции и будет, кроме кругового равномерного движения, перемещаться еще прямолинейно и равномерно вдоль направления $\mathbf{H}$ со скоростью $v_1 = |\mathbf{V}|\cos\alpha$. Сочетание этих двух движений даст винтовую линию с осью, параллельной вектору $\mathbf{H}$ и проходящей через точку O' (рис. 8). ▷

§ 5. Первая и вторая производные вектора по длине дуги кривой. Кривизна кривой. Главная нормаль

Рассмотрим в пространстве некоторую линию L. Выберем на ней какую-либо точку M_0 в качестве начала отсчета и выберем также какое-либо направление вдоль линии L, которое будем считать положительным. В качестве параметра возьмем длину дуги s, отсчитываемую от точки M_0 кривой (рис. 9). Тогда радиус вектор точки M кривой будет

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s).$$

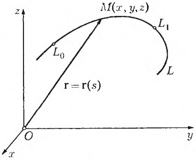

Рис. 9

При таком выборе параметра

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \boldsymbol{\tau}^0,$$

где $\boldsymbol{\tau}^0$ — единичный вектор, направленный по касательной к линии L в сторону возрастания параметра s.

Если вектор $\mathbf{r}$ задан координатами

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

то

$$\boldsymbol{\tau}^0 = \frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} + \frac{dz}{ds}\mathbf{k},$$

причем

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2} = 1.$$

Так как $|\boldsymbol{\tau}^0| = 1$, то вектор $\dfrac{d\boldsymbol{\tau}^0}{ds}$ ортогонален вектору $\boldsymbol{\tau}^0$.

Модуль вектора $\dfrac{d\boldsymbol{\tau}^0}{ds}$

$$\left|\frac{d\boldsymbol{\tau}^0}{ds}\right| = K.$$

Здесь K — кривизна линии L в точке M.

Прямая, имеющая направление вектора $\dfrac{d\boldsymbol{\tau}^0}{ds}$ и проходящая через точку M кривой, называется *главной нормалью* кривой в точке M. Обозначая единичный вектор этого направления через $\mathbf{n}^0$, будем иметь

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}^0}{ds} = K\mathbf{n}^0. \quad (1)$$

Величина, обратная кривизне кривой в данной точке, называется *радиусом кривизны* кривой в этой точке и обозначается через R:

$$R = \frac{1}{K}.$$

Поэтому формулу (1) можно переписать так:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \frac{d\boldsymbol{\tau}^0}{ds} = \frac{\mathbf{n}^0}{R}.$$

Отсюда

$$K = \frac{1}{R} = \left|\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right|,$$

или

$$K = \frac{1}{R} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2} \tag{2}$$

Формула (2) позволяет вычислить кривизну линии в любой точке, если эта линия задана параметрическими уравнениями, в которых параметром является длина дуги s.

В частном случае плоской кривой — окружности радиуса a

$$\begin{cases} x = a\cos\dfrac{s}{a}, \\ y = a\sin\dfrac{s}{a}, \end{cases}$$

имеем

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -\frac{1}{a}\cos\frac{s}{a}, \quad \frac{d^2y}{ds^2} = -\frac{1}{a}\sin\frac{s}{a},$$

и формула (2) дает

$$K = \frac{1}{R} = \sqrt{\frac{1}{a^2}\cos^2\frac{s}{a} + \frac{1}{a^2}\sin^2\frac{s}{a}} = \frac{1}{a},$$

т. е. кривизна окружности радиуса a постоянна и равна величине, обратной радиусу окружности.

Если линия L определяется векторно-параметрическим уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, где параметр t — произвольный, то

$$K = \frac{1}{R} = \frac{\left|\left[\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}, \dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right]\right|}{\left|\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}\right|^3}. \tag{3}$$

Формула (3) дает возможность вычислить кривизну кривой в любой ее точке при произвольном параметрическом задании этой кривой.

Пример 1. Вычислить кривизну винтовой линии

$$\mathbf{r} = a\cos t\,\mathbf{i} + a\sin t\,\mathbf{j} + ht\mathbf{k}.$$

Решение. Так как

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -a\sin t\,\mathbf{i} + a\cos t\,\mathbf{j} + h\mathbf{k},$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -a\cos t\,\mathbf{i} - a\sin t\,\mathbf{j},$$

то векторное произведение

$$\left[\frac{d\mathbf{r}}{dt}, \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a\sin t & a\cos t & h \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix} = ah\sin t\,\mathbf{i} - ah\cos t\,\mathbf{j} + a^2\mathbf{k}.$$

Следовательно,

$$\left|\left[\frac{d\mathbf{r}}{dt}, \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right]\right| = a\sqrt{a^2+h^2}, \qquad \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \sqrt{a^2+h^2}.$$

В силу формулы (3)

$$K = \frac{1}{R} = \frac{a}{a^2+h^2},$$

или

$$R = \frac{a^2+h^2}{a} = \text{const}.$$

Таким образом, винтовая линия имеет постоянный радиус кривизны. ▷

Задачи для самостоятельного решения

Найти радиус кривизны данных линий:

36. $\mathbf{r} = \ln\cos t\,\mathbf{i} + \ln\sin t\,\mathbf{j} + \sqrt{2}t\mathbf{k}$.

37. $\mathbf{r} = t^2\mathbf{i} + 2t^3\mathbf{j}$.

38. $\mathbf{r} = 3t^2\mathbf{i} + (3t - t^3)\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ при $t = 1$.

39. $\mathbf{r} = a(\cos t + t\sin t)\mathbf{i} + a(\sin t - t\cos t)\mathbf{j}$ при $t = \dfrac{\pi}{2}$.

40. $\mathbf{r} = a\operatorname{ch} t\,\mathbf{i} + a\operatorname{sh} t\,\mathbf{j} + at\mathbf{k}$ в любой точке t.

§ 6. Соприкасающаяся плоскость. Бинормаль. Кручение. Формулы Френе

Плоскость, проходящая через касательную прямую и главную нормаль к данной кривой L в точке M, называется *соприкасающейся плоскостью* в точке M.

Для плоской кривой соприкасающаяся плоскость совпадает с плоскостью кривой.

Если вектор $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ имеет непрерывную производную $\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$ в окрестности точки t_0 и, кроме того, вторую производную $\dfrac{d^2\mathbf{r}(t_0)}{dt^2}$ такую, что

$$\left[\frac{d\mathbf{r}(t_0)}{dt}, \frac{d^2\mathbf{r}(t_0)}{dt^2}\right] \neq 0,$$

то в точке $t = t_0$ существует соприкасающаяся плоскость к кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, векторное уравнение которой

$$\left(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{r}(t_0), \left[\frac{d\mathbf{r}(t_0)}{dt}, \frac{d^2\mathbf{r}(t_0)}{dt^2}\right]\right) = 0,$$

где $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(t)$ — радиус-вектор текущей точки плоскости.

Нормаль к кривой в точке M, перпендикулярная к соприкасающейся плоскости кривой в этой точке, называется *бинормалью* кривой в данной точке M.

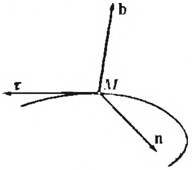

Рис. 10

Обозначим через $\mathbf{b}^0$ единичный вектор бинормали, ориентированный так, чтобы векторы $\boldsymbol{\tau}^0$, $\mathbf{n}^0$, $\mathbf{b}^0$ образовывали правую тройку (рис. 10). Тогда

$$|\mathbf{b}^0| = 1, \quad \mathbf{b}^0 = [\boldsymbol{\tau}^0, \mathbf{n}^0].$$

Для производной $\dfrac{d\mathbf{b}^0}{ds}$ получаем

$$\frac{d\mathbf{b}^0}{ds} = \left[\boldsymbol{\tau}^0, \frac{d\mathbf{n}^0}{ds}\right].$$

Вектор $\dfrac{d\mathbf{b}^0}{ds}$ перпендикулярен и вектору $\boldsymbol{\tau}^0$, и вектору $\mathbf{b}^0$, т. е. он коллинеарен вектору $\mathbf{n}^0$. Положим

$$\left|\frac{d\mathbf{b}^0}{ds}\right| = \frac{1}{T},$$

тогда будем иметь

$$\frac{d\mathbf{b}^0}{ds} = \frac{1}{T}\mathbf{n}^0.$$

Величина $\dfrac{1}{T}$ называется *кручением* данной кривой, а величину T называют *радиусом кручения* кривой.

Кручение кривой определяется формулой

$$\frac{1}{T} = R^2\left(\frac{d\mathbf{r}}{ds}, \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}, \frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}\right),$$

где символ $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ обозначает смешанное произведение векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, т. е. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}])$.

В случае, когда кривая задана векторно-параметрическим уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, имеем

$$\frac{1}{T} = \frac{\left(\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}, \dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}, \dfrac{d^3\mathbf{r}}{dt^3}\right)}{\left|\left[\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}, \dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right]\right|^2}. \tag{1}$$

Пример 1. Найти кручение винтовой линии

$$\mathbf{r} = a\cos t\,\mathbf{i} + a\sin t\,\mathbf{j} + ht\,\mathbf{k}.$$

<u>Решение</u>. Находим производные данного вектора

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -a\sin t\,\mathbf{i} + a\cos t\,\mathbf{j} + h\mathbf{k},$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -a\cos t\,\mathbf{i} - a\sin t\,\mathbf{j},$$

$$\frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3} = a\sin t\,\mathbf{i} - a\cos t\,\mathbf{j}.$$

Смешанное произведение этих векторов

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}, \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}, \frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3}\right) = \begin{vmatrix} -a\sin t & a\cos t & h \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \\ a\sin t & -a\cos t & 0 \end{vmatrix} = a^2h.$$

В примере 1 § 5 найдено, что

$$\left|\left[\frac{d\mathbf{r}}{dt}, \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right]\right|^2 = a^2(a^2 + h^2).$$

Применяя формулу (1), получим для кручения

$$\frac{1}{T} = \frac{h}{a^2 + h^2}.$$

Таким образом, кручение винтовой линии во всех ее точках одно и то же. ▷

Пример 2. Написать уравнение соприкасающейся плоскости в точке $t = 0$ винтовой линии

$$\mathbf{r} = a\cos t\,\mathbf{i} + a\sin t\,\mathbf{j} + ht\,\mathbf{k}.$$

<u>Решение</u>. Находим значения данного вектора и его производных $\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$ и $\dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$ в точке $t = 0$:

$$\mathbf{r}(0) = a\mathbf{i}, \quad \frac{d\mathbf{r}(0)}{dt} = a\mathbf{j} + h\mathbf{k}, \quad \frac{d^2\mathbf{r}(0)}{dt^2} = -a\mathbf{i}.$$

Следовательно (см. пример 1 § 5),

$$\left[\frac{d\mathbf{r}(0)}{dt}, \frac{d^2\mathbf{r}(0)}{dt^2}\right] = -ah\mathbf{j} + a^2\mathbf{k}.$$

Векторное уравнение соприкасающейся плоскости

$$\left(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{r}(0), \frac{d\mathbf{r}(0)}{dt}, \frac{d^2\mathbf{r}(0)}{dt^2}\right) = 0$$

или

$$(\boldsymbol{\rho} - a\mathbf{i}, -ah\mathbf{j} + a^2\mathbf{k}) = 0.$$

Так как радиус-вектор текущей точки соприкасающейся плоскости $\boldsymbol{\rho} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, то, переходя к координатной записи, получим уравнение искомой плоскости в виде $hy - az = 0$. ▷

Формулы, выражающие производные векторов $\boldsymbol{\tau}^0$, $\mathbf{b}^0$, $\mathbf{n}^0$, называются *формулами Френе*:

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}^0}{ds} = \frac{1}{R}\mathbf{n}^0, \qquad \frac{d\mathbf{b}^0}{ds} = -\frac{1}{T}\mathbf{n}^0, \qquad \frac{d\mathbf{n}^0}{ds} = -\frac{1}{R}\boldsymbol{\tau}^0 + \frac{1}{T}\mathbf{b}^0.$$

Задачи для самостоятельного решения

41. Написать уравнение соприкасающейся плоскости в точке $t = 2$ кривой

$$\mathbf{r} = t\mathbf{i} - t\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{k}.$$

42. Написать уравнение соприкасающейся плоскости в точке $t = 0$ кривой

$$\mathbf{r} = e^t\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j} + \sqrt{2}t\mathbf{k}.$$

43. Найти кручение в точке $t = 0$ кривой

$$\mathbf{r} = e^t\cos t\,\mathbf{i} + e^t\sin t\,\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}.$$

44. Найти кручение в любой точке t кривой

$$\mathbf{r} = a\operatorname{ch} t\,\mathbf{i} + a\operatorname{sh} t\,\mathbf{j} + at\mathbf{k}.$$

ГЛАВА

2 Скалярное поле

§ 7. Примеры скалярных полей. Поверхности и линии уровня

Определение. Если в каждой точке пространства или части пространства определено значение некоторой величины, то говорят, что задано *поле* данной величины.

Поле называется *скалярным*, если рассматриваемая величина скалярна, т. е. вполне характеризуется своим числовым значением.

Пример скалярных полей дает поле температур, электростатическое поле.

Задание скалярного поля осуществляется заданием скалярной функции точки M

$$u = f(M).$$

Если в пространстве введена декартова система координат xyz, то

$$u = f(x, y, z).$$

Геометрической характеристикой скалярного поля служат поверхности уровня — геометрическое место точек, в которых скалярная функция поля принимает одно и тоже значение. Поверхность уровня данного поля определяется уравнением

$$f(x, y, z) = C, \quad \text{где} \quad C = \text{const}.$$

В случае поля температур, создаваемого в однородной и изотропной среде точечным источником тепла, поверхности уровня будут сферами с центром в источнике (центрально-симметричное поле).

В случае бесконечной равномерно нагретой нити поверхностями уровня (изотермическими поверхностями) будут круговые цилиндры, ось которых совпадает с нитью.

Пример 1. Построить поверхности уровня скалярного поля

$$u = x + 2y + 3z.$$

<u>*Решение*</u>. Поверхности уровня определяются уравнением

$$x + 2y + 3z = C, \quad \text{где} \quad C = \text{const}.$$

Это есть однопараметрическое семейство параллельных плоскостей. ▷

Пример 2. Найти поверхности уровня скалярного поля

$$u = x^2 + y^2 - z^2.$$

Решение. Поверхности уровня определяются уравнениями

$$x^2+y^2-z^2=C, \quad \text{где } C=\text{const}.$$

При $C=0$ получаем круговой конус. При любом $C>0$ получаем однополостные гиперболоиды вращения с осью, совпадающей с осью Oz. При $C<0$ получаем двухполостный гиперболоид вращения. ▷

Пример 3. Найти поверхности уровня скалярного поля

$$u=\arcsin\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Решение. Область определения данного скалярного поля находится из неравенства

$$\left|\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant 1, \quad \text{т. е.} \quad 0\leqslant\frac{z^2}{x^2+y^2}\leqslant 1,$$

откуда $0\leqslant z^2\leqslant x^2+y^2$. Это двойное неравенство показывает, что поле определено вне кругового конуса $z^2=x^2+y^2$ и на нем самом, кроме его вершины $O(0,0,0)$.

Поверхности уровня определяются уравнением

$$\arcsin\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}=C, \quad \text{где} \quad -\frac{\pi}{2}\leqslant C\leqslant\frac{\pi}{2},$$

т. е. $\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}=\sin C$, или $z^2=(x^2+y^2)\sin^2 C$. Это есть семейство круговых конусов, расположенных вне конуса $z^2=x^2+y^2$, с общей осью симметрии Oz и общей вершиной $O(0,0,0)$, в которой данное поле не определено, причем сам конус $z^2=x^2+y^2$ также входит в это семейство. ▷

Пример 4. Найти поверхности уровня скалярного поля

$$u=e^{(\mathbf{a},\mathbf{r})},$$

где $\mathbf{a}$ — постоянный вектор, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки.

Решение. Здесь

$$\mathbf{r}=\{x,y,z\}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$$

и пусть

$$\mathbf{a}=\{a_1,a_2,a_3\}=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}.$$

Тогда скалярное произведение

$$(\mathbf{a},\mathbf{r})=a_1x+a_2y+a_3z.$$

Уравнение поверхностей уровня будет

$$e^{(\mathbf{a},\mathbf{r})}=C, \quad C>0.$$

Отсюда

$$(\mathbf{a},\mathbf{r})=\ln C, \quad \text{или} \quad a_1x+a_2y+a_3z=\ln C.$$

Это есть семейство параллельных плоскостей. ▷

Задачи для самостоятельного решения

Найти поверхности уровня следующих скалярных полей.

45. $u=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}$. **46.** $u=x^2+y^2-z$.

47. $u = \dfrac{x^2 + y^2}{z}$. **48.** $u = x^2 + 2y^2 - 9z^2$.

49. $u = 3^z$. **50.** $u = \dfrac{(\mathbf{a}, \mathbf{r})}{(\mathbf{b}, \mathbf{r})}$ ($\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ — постоянные векторы).

51. $u = \ln|\mathbf{r}|$. **52.** $u = e^{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{r})}$ ($\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ — постоянные векторы).

Скалярное поле называется *плоским*, если существует некоторая плоскость, такая, что во всех плоскостях, параллельных указанной, скалярное поле будет одним и тем же.

Если эту плоскость принять за плоскость xOy, то скалярное поле определится скалярной функцией

$$u = f(x, y),$$

т. е. не будет зависеть от z.

Примером плоского скалярного поля может служить поле температур бесконечной равномерно нагретой нити.

Геометрической характеристикой плоских скалярных полей служат линии уровня — геометрические места точек, в которых скалярная функция имеет одно и то же значение.

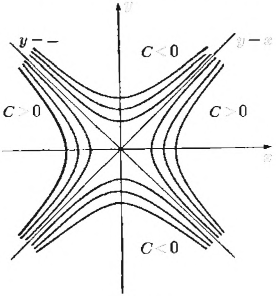

Рис. 11

Пример 5. Найти линии уровня скалярного поля

$$u = x^2 - y^2.$$

<u>*Решение.*</u> Линии уровня определяются уравнениями

$$x^2 - y^2 = C, \quad C - \text{const}.$$

При $C = 0$ получаем пару прямых

$$y = x, \quad y = -x.$$

При $C \neq 0$ получаем семейство гипербол (рис. 11). ▷

Задачи для самостоятельного решения

Найти линии уровня следующих плоских полей.

53. $u = 2x - y$. **54.** $u = \ln\sqrt{\dfrac{y}{2x}}$. **55.** $u = \dfrac{y^2}{x}$. **56.** $u = e^{x^2 - y^2}$.

57. Найти линии уровня скалярного поля u, заданного неявно уравнением

$$u + x\ln u + y = 0.$$

§ 8. Производная по направлению

Пусть имеем скалярное поле, определяемое скалярной функцией

$$u = f(M).$$

Возьмем в поле точку M_0 и выберем некоторое направление, определяемое вектором $\mathbf{l}$. Возьмем в поле другую точку M так, чтобы вектор $\overrightarrow{M_0M}$ был параллелен вектору $\mathbf{l}$. Обозначим через Δu разность

$$\Delta u = f(M) - f(M_0),$$

а через Δl — длину вектора $\overrightarrow{M_0M}$. Отношение $\dfrac{\Delta u}{\Delta l}$ определяет среднюю скорость изменения скалярного поля на единицу длины по данному направлению. Будем стремить точку M к точке M_0 так, чтобы вектор $\overrightarrow{M_0M}$ оставался все время коллинеарен вектору $\mathbf{l}$. При этом $\Delta l \to 0$

Определение. Если существует при $\Delta l \to 0$ предел отношения $\dfrac{\Delta u}{\Delta l}$, то его называют *производной* функции $u = f(M)$ в данной точке M_0 по направлению $\mathbf{l}$ и обозначают символом $\dfrac{\partial u}{\partial l}$, так что по определению

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{f(M) - f(M_0)}{\Delta l}, \quad \overrightarrow{M_0M} \parallel \mathbf{l}.$$

Это определение производной по направлению носит инвариантный характер, т. е. не связано с выбором системы координат.

Пусть в пространстве введена декартова система координат и пусть функция $f(M) = f(x, y, z)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Тогда

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} \cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} \cos\beta + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} \cos\gamma, \tag{1}$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы вектора

$$\mathbf{l} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$$

— находятся по формулам

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{|\mathbf{l}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_2}{|\mathbf{l}|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_3}{|\mathbf{l}|},$$

$$|\mathbf{l}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Символы $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}$ означают, что частные производные берутся в точке M_0.

Для плоского поля $u = f(x, y)$ производная по направлению $\mathbf{l}$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ будет равна

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} \cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} \sin\alpha, \tag{2}$$

где α — угол, образованный вектором $\mathbf{l}$ с осью Ox.

Замечание. Сами частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ являются производными функции u по направлению координатных осей Ox, Oy, Oz соответственно.

Формула (1) для вычисления производной по направлению в данной точке остается в силе и в том случае, когда точка M стремится к точке M_0 по кривой, для которой вектор $\mathbf{l}$ является касательным в точке M_0.

Пример 1. Найти производную скалярного поля

$$u = xyz$$

в точке $M_0(1, -1, 1)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(2, 3, 1)$.

Решение. Находим направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{M_0M_1} = \{1, 4, 0\}$, длина которого равна $|\overrightarrow{M_0M}| = \sqrt{17}$ Имеем

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}, \quad \cos\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}, \quad \cos\gamma = 0.$$

Значения частных производных функции $u = xyz$ в точке $M_0(1, -1, 1)$ равны

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = -1, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = 1, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = -1.$$

Используя формулу (1), получим

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0} = -\frac{1}{\sqrt{17}} + \frac{4}{\sqrt{17}} - 1 \cdot 0 = \frac{3}{\sqrt{17}}.$$

Тот факт, что $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0} > 0$, означает что скалярное поле в точке M_0 в данном направлении возрастает. ▷

Пример 2. Вычислить производную скалярного поля

$$u = \operatorname{arctg} xy$$

в точке $M_0(1, 1)$, принадлежащей параболе $y = x^2$, по направлению этой кривой (в направлении возрастания абсциссы).

Решение. Направлением $\mathbf{l}$ параболы $y = x^2$ в точке $M_0(1, 1)$ считается направление касательной к параболе в этой точке (рис. 12).

Пусть касательная $\mathbf{l}$ к кривой в точке M_0 образует с осью Ox угол α. Имеем

$$y' = 2x; \quad \operatorname{tg}\alpha = y'\big|_{x=1} = 2,$$

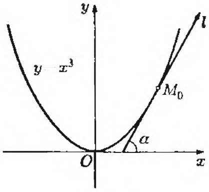

Рис. 12

откуда направляющие косинусы касательной

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt5},$$

$$\cos\beta = \sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{2}{\sqrt5}.$$

Значения частных производных данной функции $u(x, y)$ в точке $M_0(1, 1)$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = \left.\frac{y}{1+x^2y^2}\right|_{M_0} = \frac{1}{2},$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = \left.\frac{x}{1+x^2y^2}\right|_{M_0} = \frac{1}{2}.$$

Подставляя найденные величины в формулу (2), получим

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt5} = \frac{3}{2\sqrt5}. \qquad \triangleright$$

Пример 3. Найти производную скалярного поля $u = xz^2 + 2yz$ в точке $M_0(1, 0, 2)$ вдоль окружности

$$\begin{cases} x = 1 + \cos t, \\ y = \sin t - 1, \\ z = 2. \end{cases}$$

◁ Решение. Векторное уравнение окружности имеет вид

$$\mathbf{r}(t) = (1 + \cos t)\mathbf{i} + (\sin t - 1)\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

Находим вектор $\boldsymbol{\tau}$, касательный к ней в любой точке M. Имеем

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\sin t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j}.$$

Данная точка $M_0(1, 0, 2)$ находится в плоскости xOz в первом октанте, и ей соответствует значение параметра $t = \frac{\pi}{2}$. В этой точке будем иметь

$$\boldsymbol{\tau}\big|_{M_0} = -\sin\frac{\pi}{2}\,\mathbf{i} + \cos\frac{\pi}{2}\,\mathbf{j} = -\mathbf{i}.$$

Отсюда получаем, что направляющие косинусы касательной к окружности равны $\cos\alpha = -1$, $\cos\beta = 0$, $\cos\gamma = 0$. Значения частных производных данного скалярного поля в точке $M_0(1, 0, 2)$ равны

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = z^2\big|_{M_0} = 4, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = 2z\big|_{M_0} = 4, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = (2xz + 2y)\big|_{M_0} = 4.$$

Следовательно, искомая производная

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial u}{\partial \tau}\right|_{M_0} = 4\cdot(-1) + 4\cdot 0 + 4\cdot 0 = -4. \qquad \triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

В следуюц их зада ах на ти ля данных функ ий производную в точке M (x , y_0, z_0) по направлен ю к точке $M_1(x\ , y\quad)$

58. $u = \quad x \quad y^2 + z \qquad M(1\ 1\ 1) \quad M(3\ 2\ 1)$

59. $u \quad x\,y \quad xz \ -2 \qquad M(1\ 1\ -1) \quad M(2 \quad 1\ 3)$

60. $u = xe \quad ye^x \quad z \qquad M(3\ 0\ 2) \quad M(4, 1\ 3)$

61. $u \quad \frac{x}{y} \quad \frac{y}{x} \qquad M(\quad 1) \quad M(4\ 5)$

62. Найти производную скалярного поля $u = \ln(x \quad y^2)$ в точке M (2) пара болы $y^2 \quad 4x$ i о направлению той кривой

63. Найти производную скалярного поля $u = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ в точке M (2 2) окруж ности $x^2 \quad y \quad 4x = 0$ вдоль дуги этой окружности

64. Найти про зводную скалярного поля $u \quad x \quad y$ в точке M ($x_0\ y_0$) окруж ности $x \quad y \quad R$ по направлению этой окружности

65. Най и рои водную скалярного поля $u = 2xy \quad y^2$ в точке ($\sqrt{2}$ 1) эллипса $\frac{x^2}{4} + \frac{y}{2} \quad 1$ по направлению внешней нормали к эллипсу в этой очке

66. Найти производную скалярного поля $u = x \quad y^2$ в точке (5 4) гиперболы $x^2 - y^2 \quad 9$ по н правлению этой кривой

67. Найти прои водную скалярного поля $u = \ln(xy \quad yz \quad xz)$ в точке $M_0(0\ 1\ 1)$ по направлению окружности $x \quad \cos t\ \ y \quad \sin t,\ z \quad 1$

68. Найти производную скалярного по я $u \quad x \quad y \quad z$ в точке M соответству ющей знач нию параметра $t \quad \frac{\pi}{2}$ по направлению винтовой линии $x = R\cos t$ $y = R\sin t\ \ z \quad at$

§ 9. Градиент скалярного поля

Пусть имеем скалярное поле, определяемое скалярной функцией

$$u = f(x\ y\ z)$$

где функция f предполагается дифференцируемой

Определение *Градиентом* скалярного поля u в данной точке M называется вектор обозначаемый символом $\operatorname{grad} u$ и определяемый равенством

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} \quad \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k} \tag{1}$$

Исп ользуя формулу) из § 8 для производной по направлению, имеем

$$\frac{\partial u}{\partial l} \quad (\operatorname{grad} u\ \ l\ ) \tag{2}$$

где $\mathbf{l}^0$ — единичный вектор в направлении $\mathbf{l}$, т. е.

$$\mathbf{l}^0 = \frac{\mathbf{l}}{|\mathbf{l}|} = \mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\cos\beta + \mathbf{k}\cos\gamma.$$

Свойства градиента

1. Градиент направлен по нормали к поверхности уровня (или к линии уровня, если поле плоское).
2. Градиент напревлен в сторону возрастания функции поля.
3. Модуль градиента равен наибольшей производной по напревлению в данной точке поля:

$$\max\frac{\partial u}{\partial l} = |\operatorname{grad} u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}\ [1]$$

Эти свойства дают инвариантную характеристику градиента. Они говорят о том, что вектор $\operatorname{grad} u$ указывает направление и величину наибольшего изменения скалярного поля в данной точке.

Пример 1. Найти градиент скалярного поля

$$u = x - 2y + 3z.$$

<u>*Решение*</u>. Согласно формуле (1) имеем

$$\operatorname{grad} u = 1\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}.$$

Поверхностями уровня данного скалярного поля являются плоскости $x - 2y + 3z = C$; вектор $\operatorname{grad} u = \{1, -2, 3\}$ есть нормальный вектор плоскостей этого семейства. ▷

Пример 2. Найти наибольшую крутизну (скорость) подъема поверхности $u = x^y$ в точке $M(2, 2, 4)$.

<u>*Решение*</u>. Имеем

$$\operatorname{grad} u = yx^{y-1}\mathbf{i} + x^y \ln x\,\mathbf{j}, \quad \operatorname{grad} u\big|_M = 4\mathbf{i} + 4\ln 2\,\mathbf{j},$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_{\max} = |\operatorname{grad} u| = 4\sqrt{1 + (\ln 2)^2}. \quad ▷$$

Пример 3. Найти единичный вектор нормали к поверхности уровня скалярного поля $u = x^2 + y^2 + z^2$.

<u>*Решение*</u>. Поверхности уровня скалярного поля — сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = C \quad (C > 0).$$

---

[1] Максимум берется по всевозможным направлениям $\mathbf{l}$ в данной точке поля.

Градиент направлен по нормали к поверхности уровня, так что $\operatorname{grad} u = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$ определяет вектор нормали к поверхности уровня в точке $M(x, y, z)$. Для единичного вектора нормали получаем выражение

$$\mathbf{n}^0 = \frac{\operatorname{grad} u}{|\operatorname{grad} u|} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}. \qquad \triangleright$$

Пример 4. Найти градиент поля $u = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{r})$, где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — постоянные векторы, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки.

<u>*Решение.*</u> Пусть

$$\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}, \quad \mathbf{b} = \{b_1, b_2, b_3\}, \quad \mathbf{r} = \{x, y, z\}.$$

Тогда

$$u = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_2 \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

По правилу дифференцирования определителя[2] получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{grad} u = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]. \qquad \triangleright$$

Пример 5. Найти градиент расстояния

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2},$$

---

[2] Пусть дан определитель $D(t)$, элементами a_{ij} которого являются дифференцируемые функции от t

$$D(t) = \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \ldots & a_{2n}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \ldots & a_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

Тогда производная определителя $D'(t)$ находится по формуле

$$D'(t) = \begin{vmatrix} a'_{11}(t) & a'_{12}(t) & \ldots & a'_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \ldots & a_{2n}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \ldots & a_{nn}(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ a'_{21}(t) & a'_{22}(t) & \ldots & a'_{2n}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \ldots & a_{nn}(t) \end{vmatrix} + \ldots$$

$$\ldots + \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \ldots & a_{2n}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a'_{n1}(t) & a'_{n2}(t) & \ldots & a'_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

где $P(x, y, z)$ — изучаемая точка поля, $P_0(x_0, y_0, z_0)$ — некоторая фиксированная точка.

Решение. Имеем

$$\operatorname{grad} r = \frac{\partial r}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial r}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial r}{\partial z}\mathbf{k} = \frac{(x-x_0)\mathbf{i} + (y-y_0)\mathbf{j} + (z-z_0)\mathbf{k}}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} = \mathbf{r}^0$$

— единичный вектор направления $\overrightarrow{P_0P}$. ▷

Пример 6. Рассмотрим скалярную функцию

$$u = r_1 + r_2,$$

где r_1, r_2 — расстояние от некоторой точки $P(x, y)$ плоскости до двух фиксированных точек F_1 и F_2 плоскости.

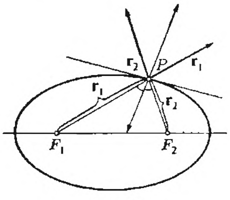

Рис. 13

Линия уровня этой функции — эллипсы. Имеем (см. пример 5)

$$\operatorname{grad}(r_1 + r_2) = \mathbf{r}_1^0 + \mathbf{r}_2^0.$$

Это показывает, что градиент равен диагонали ромба, построенного на ортах радиусов-векторов, проведенных к точке P из фокусов F_1 и F_2 (рис. 13). Следовательно, нормаль к эллипсу в какой-либо его точке делит пополам угол между радиусами-векторами, проведенными в эту точку.

Физическая интерпретация: луч света, вышедший из одного фокуса, попадает в другой фокус.

Пример 7. Найти угол Θ между градиентами функций

$$u = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{и} \quad v = x + y + 2\sqrt{xy}$$

в точке $M_0(1, 1)$.

Решение. Находим градиенты данных функций в точке $M_0(1, 1)$. Имеем

$$\operatorname{grad} u\big|_{M_0} = \left.\frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right|_{M_0} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j},$$

$$\operatorname{grad} v\big|_{M_0} = \left[\left(1 + \sqrt{\frac{y}{x}}\right)\mathbf{i} + \left(1 + \sqrt{\frac{x}{y}}\right)\mathbf{j}\right]\bigg|_{M_0} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}.$$

Угол Θ между $\operatorname{grad} u$ и $\operatorname{grad} v$ в точке M_0 определяется из равенства

$$\cos\Theta = \frac{(\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v)\big|_{M_0}}{|\operatorname{grad} u|_{M_0} \cdot |\operatorname{grad} v|_{M_0}} = \frac{2/\sqrt{2} + 2/\sqrt{2}}{1 \cdot 2\sqrt{2}} = 1.$$

Отсюда

$$\Theta = 0.$$

▷

Пример 8. Найти производную по направлению радиуса-вектора $\mathbf{r}$ для функции $u = \sin r$, где $r = |\mathbf{r}|$.

Решение. По формуле (2) производная данной функции по направлению радиуса-вектора $\mathbf{r}$ равна

$$\frac{\partial u}{\partial r} = (\operatorname{grad} \sin r, \mathbf{r}^0). \tag{3}$$

Находим градиент этой функции:

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} \sin r &= \frac{\partial(\sin r)}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial(\sin r)}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial(\sin r)}{\partial z}\mathbf{k} = \\ &= \frac{\partial(\sin r)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial(\sin r)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial(\sin r)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z}\mathbf{k} = \\ &= \left(\frac{\partial r}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial r}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial r}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cos r = \mathbf{r}^0 \cos r.\end{aligned} \tag{4}$$

Подставляя (4) в (3), получим

$$\frac{\partial u}{\partial r} = (\mathbf{r}^0 \cos r, \mathbf{r}^0) = (\mathbf{r}^0, \mathbf{r}^0)\cos r = \cos r. \quad \triangleright$$

Пример 9. Найти производную скалярного поля $u = f(x, y, z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ линии l, заданной системой уравнений

$$\begin{cases} f(x, y, z) = a & (a = \text{const}), \\ \varphi(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

по направлению этой линии.

Решение. Направление линии l определяется направлением ее касательного вектора τ, который, по определению, есть вектор, касательный к поверхности $f(x, y, z) = a$. Поверхность $f(x, y, z) = a$ есть поверхность уровня данного скалярного поля $u = f(x, y, z)$. Поскольку

$$\frac{\partial u}{\partial l} = (\operatorname{grad} u, \mathbf{l}^0) = (\operatorname{grad} u, \tau^0)$$

и вектор $\operatorname{grad} u$ перпендикулярен к поверхности уровня $f(x, y, z) = a$, то $\operatorname{grad} u$ перпендикулярен и орту τ^0, и поэтому

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0} = (\operatorname{grad} u, \tau^0)\big|_{M_0} = 0. \quad \triangleright$$

Пример 10. Найти в точке $M_0(1, 1, 1)$ направление наибольшего изменения скалярного поля $u = xy + yz + xz$ и величину этого наибольшего изменения в этой точке.

Решение. Направление наибольшего изменения поля указывается вектором $\operatorname{grad} u(M)$. Находим его:

$$\operatorname{grad} u(M) = (y + z)\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} + (y + x)\mathbf{k}$$

и, значит, $\operatorname{grad} u(M) = 2(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$. Этот вектор определяет направление наибольшего возрастания данного поля в точке $M_0(1, 1, 1)$. Величина наибольшего изменения поля в этой точке равна

$$\max \frac{\partial u}{\partial l} = |\operatorname{grad} u(M_0)| = 2\sqrt{3}. \quad \triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

69. Найти градиент скалярного поля $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ в точке $M_0(1, 1, -1)$.

70. Найти градиент скалярного поля $u = ze^{x^2+y^2+z^2}$ в точке $O(0, 0, 0)$.

71. Найти угол φ между градиентами функции $u = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$ в точках $M_1(1, 1)$ и $M_2(-1, -1)$.

72. Найти угол φ между градиентами функции $u = (x + y)e^{x+y}$ в точках $M_1(0, 0)$ и $M_2(1, 1)$.

73. Найти угол φ между градиентами функций $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ и $v = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ в точке $M_2(-1, -1)$.

74. Найти точки, в которых градиент скалярного поля $u = \sin(x + y)$ равен $\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

75. Найти точки, в которых модуль градиента скалярного поля

$$u = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

равен единице.

76. Пусть $u = u(x, y, z)$ и $v = v(x, y, z)$ — дифференцируемые в точке $M(x, y, z)$ функции. Показать, что

а) $\operatorname{grad}\lambda u = \lambda\operatorname{grad}u$, $\lambda = \mathrm{const}$; б) $\operatorname{grad}(u \pm v) = \operatorname{grad}u \pm \operatorname{grad}v$;

в) $\operatorname{grad}(uv) = v\operatorname{grad}u + u\operatorname{grad}v$; г) $\operatorname{grad}\dfrac{u}{v} = \dfrac{v\operatorname{grad}u + u\operatorname{grad}v}{v^2}$, $v \neq 0$.

77. Показать, что

$$\operatorname{grad}u(\varphi) = \frac{du}{d\varphi}\operatorname{grad}\varphi,$$

где $\varphi = \varphi(x, y, z)$ — дифференцируемая функция, а $u = u(\varphi)$ имеет производную по φ.

Найти градиенты следующих скалярных полей, если

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — постоянные векторы:

78. $u = \ln r$. **79.** $u = (\mathbf{a}, \mathbf{r})$. **80.** $u = (\mathbf{a}, \mathbf{r})(\mathbf{b}, \mathbf{r})$. **81.** $u = \big|[\mathbf{a}, \mathbf{r}]\big|^2$.

82. Показать, что $(\operatorname{grad}u(r), \mathbf{r}) = u'(r)\cdot r$.

83. Показать, что $[\operatorname{grad}u(r), \mathbf{r}] = 0$.

84. Пусть $w = f(u, v)$, где $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$. Доказать, что

$$\operatorname{grad}w = \frac{\partial f}{\partial u}\operatorname{grad}u + \frac{\partial f}{\partial v}\operatorname{grad}v,$$

если f, u, v — дифференцируемые функции.

85. Пусть G — выпуклая область в пространстве (т. е. такая область, что если две точки M и N принадлежат области G, то весь отрезок MN принадлежит этой области). Пусть в области G задано скалярное поле $u(M)$, имеющее во всех точках градиент, непрерывный и ограниченный в G:

$$|\operatorname{grad}u(M)| \leqslant A, \quad M \in G, \quad A = \mathrm{const}.$$

Доказать, что для любых точек M и N области G имеет место неравенство

$$|u(N) - u(M)| \leqslant A\,|\overrightarrow{MN}|.$$

86. Найти производную функции $u = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}$ в произвольной точке $M(x, y, z)$ в направлении радиуса-вектора $\mathbf{r}$ этой точки.

87. Найти производную функции $u = \dfrac{1}{r}$, где $r = |\mathbf{r}|$ в направлении вектора $\mathbf{l} = \cos\alpha\,\mathbf{i} + \cos\beta\,\mathbf{j} + \cos\gamma\,\mathbf{k}$. При каком условии эта производная равна нулю?

88. Найти производную функции $u = \dfrac{1}{r}$, где $r = |\mathbf{r}|$, в направлении ее градиента.

89. Найти производную функции $u = yze^x$ в точке $M_0(0, 0, 1)$ по направлению ее градиента.

90. Найти производную скалярного поля $u = u(x, y, z)$ по направлению градиента скалярного поля $v = v(x, y, z)$. При каком условии она равна нулю?

91. Для следующих скалярных полей найти направление и величину наибольшего изменения в данных точках M_0:

а) $u(M) = x^2y + y^2z + z^2x$, $M_0(1, 0, 0)$; б) $u(M) = xyz$, $M_0(2, 1, -1)$.

ГЛАВА 3

Векторное поле

§ 10. Векторные линии. Дифференциальные уравнения векторных линий

Определение 1. Если в каждой точке M пространства или части пространства определена векторная величина $\mathbf{a} = \mathbf{a}(M)$, то говорят, что задано *векторное поле*.

Если в пространстве введена декартова система координат, то задание векторного поля $\mathbf{a} = \mathbf{a}(M)$ равносильно заданию трех скалярных функций точки $P(M)$, $Q(M)$, $R(M)$, так что

$$\mathbf{a}(M) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}.$$

Определение 2. *Векторной линией* векторного поля $\mathbf{a}$ называется кривая, в каждой точке M которой вектор $\mathbf{a}$ направлен по касательной к этой кривой.

Пусть векторное поле определяется вектором

$$\mathbf{a} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k},$$

где

$$P = P(x, y, z), \quad Q = Q(x, y, z), \quad R = R(x, y, z)$$

— непрерывные функции от x, y, z, имеющие ограниченные частные производные первого порядка.

Тогда дифференциальные уравнения векторных линий имеют вид

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}. \tag{1}$$

Интегрирование системы двух дифференциальных уравнений (1) дает систему двух конечных уравнений

$$\varphi_1(x, y, z) = C_1, \quad \varphi_2(x, y, z) = C_2,$$

которые, рассматриваемые в совокупности, определяют двухпараметрическое семейство векторных линий

$$\begin{cases} \varphi_1(x, y, z) = C_1, \\ \varphi_2(x, y, z) = C_2. \end{cases} \tag{2}$$

Если в некоторой области G для системы (1) выполнены условия теоремы существования и единственности решения, то через каждую точку $M_0(x_0, y_0, z_0) \in G$ проходит единственная векторная линия

$$\begin{cases} \varphi_1(x, y, z) = \varphi_1(x_0, y_0, z_0), \\ \varphi_2(x, y, z) = \varphi_2(x_0, y_0, z_0). \end{cases}$$

Пример 1. Найти векторные линии векторного поля

$$\mathbf{a} = [\mathbf{c}, \mathbf{r}],$$

где $\mathbf{c}$ — постоянный вектор.

Решение. Имеем

$$\mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}, \quad \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

так что

$$\mathbf{a} = [\mathbf{c}, \mathbf{r}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = (c_2z - c_3y)\mathbf{i} + (c_3x - c_1z)\mathbf{j} + (c_1y - c_2x)\mathbf{k}.$$

Дифференциальные уравнения векторных линий:

$$\frac{dx}{c_2z - c_3y} = \frac{dy}{c_3x - c_1z} = \frac{dz}{c_1y - c_2x}. \tag{3}$$

Домножим числитель и знаменатель первой дроби на x, второй — на y, третьей — на z и сложим почленно. Используя свойство пропорций, получим

$$\frac{dx}{c_2z - c_3y} = \frac{dy}{c_3x - c_1z} = \frac{dz}{c_1y - c_2x} = \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{0}.$$

Отсюда

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0,$$

а значит

$$x^2 + y^2 + z^2 = A_1, \quad A_1 = \text{const} > 0.$$

Домножим теперь числитель и знаменатель первой дроби (3) на c_1, второй — на c_2, третьей — на c_3 и сложив почленно, получим

$$\frac{dx}{c_2z - c_3y} = \frac{dy}{c_3x - c_1z} = \frac{dz}{c_1y - c_2x} = \frac{c_1\,dx + c_2\,dy + c_3\,dz}{0},$$

откуда

$$c_1\,dx + c_2\,dy + c_3\,dz = 0$$

и, следовательно,

$$c_1x + c_2y + c_3z = A_2, \quad A_2 = \text{const}.$$

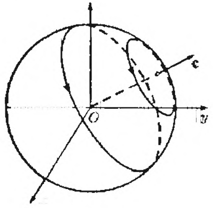

Рис. 14

Искомые уравнения векторных линий

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = A_1, \\ c_1x + c_2y + c_3z = A_2. \end{cases}$$

Эти уравнения показывают, что векторные линии получаются в результате пересечения сфер, имеющих общий центр в начале координат, с плоскостями, перпендикулярными вектору $\mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$. Отсюда следует, что векторные линии являются окружностями, центры которых находятся на прямой, проходящей через начало координат в направлении вектора $\mathbf{c}$. Плоскости окружностей перпендикулярны указанной прямой (рис. 14).

Пример 2. Нвйти векторную линию поля

$$\mathbf{a} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + b\mathbf{k},$$

проходящую через точку $(1, 0, 0)$.

<u>*Решение.*</u> Дифферанцивльные уравнения векторных линий

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{b}.$$

Отсюда находим

$$x^2 + y^2 = C_1, \qquad C_1 > 0,$$

или, если ввести параметр t, то будем иметь

$$x = \sqrt{C_1}\cos t, \quad y = \sqrt{C_1}\sin t.$$

В этом случае уравнеиие

$$\frac{dy}{x} = \frac{dz}{b}$$

принимает вид

$$\frac{\sqrt{C_1}\cos t\,dt}{\sqrt{C_1}\cos t} = \frac{dz}{b}, \quad \text{или} \quad dz = b\,dt,$$

откуда находим

$$z = bt + C_2.$$

Итак, параметрические уравнения векторных линий будут

$$\begin{cases} x = \sqrt{C_1}\cos t, \\ y = \sqrt{C_1}\sin t, \\ z = bt + C_2. \end{cases} \tag{4}$$

Потребовав прохождения векторной линии через точку $(1, 0, 0)$, будем иметь

$$\begin{cases} 1 = \sqrt{C_1}\cos t, \\ 0 = \sqrt{C_1}\sin t, \\ 0 = bt + C_2. \end{cases}$$

Первые два уравнения этой системы удовлетворяются при $t = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \ldots$ и при $C_1 = 1$. Беря $k = 0$, получим $t = 0$, и последнее уравнение системы дает

$C_2 = 0$. Искомая векторная линия, проходящая через точку $(1, 0, 0)$, будет

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \\ z = bt. \end{cases}$$

Это — винтовая линия. ▷

Задачи для самостоятельного решения

Найти векторные линии следующих векторный полей:

92. $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

93. $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, где a_1, a_2, a_3 — постоянные.

94. $\mathbf{a} = (z - y)\mathbf{i} + (x - z)\mathbf{j} + (y - x)\mathbf{k}$.

95. Найти векторную линию поля

$$\mathbf{a} = x^2\mathbf{i} - y^3\mathbf{j} + z^2\mathbf{k},$$

проходящую через точку $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$.

Векторное поле называется *плоским*, если все векторы $\mathbf{a}$ расположены в параллельных плоскостях и поле одно и то же в каждой из этих плоскостей.

Если в какой-либо из этих плоскостей ввести декартову систему координат xOy, то векторы поля не будут содержать компоненты по оси Oz и координаты вектора не будут зависеть от z, т. е.

$$\mathbf{a} = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}.$$

Дифференциальные уравнения векторных линий плоского поля будут иметь вид

$$\frac{dx}{P(x, y)} = \frac{dy}{Q(x, y)} = \frac{dz}{0}$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{Q(x, y)}{P(x, y)}, \\ z = \text{const}. \end{cases}$$

Отсюда видно, что векторные линии плоского поля являются плоскими кривыми, лежащими в плоскостях, параллельных плоскости xOy.

Пример 3. Найти векторные линии магнитного поля бесконечного проводника тока.

<u>*Решение*</u>. Будем считать, что проводник направлен по оси Oz и в этом же направлении течет ток I. Вектор напряженности $\mathbf{H}$ магнитного поля, создаваемого током, равен

$$\mathbf{H} = \frac{2}{\rho^2}[\mathbf{I}, \mathbf{r}], \tag{5}$$

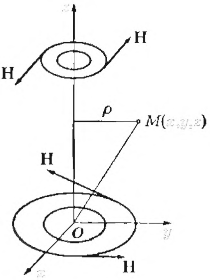

Рис. 15

где $\mathbf{I} = I \cdot \mathbf{k}$ есть вектор тока, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки $M(x, y, z)$, ρ — расстояние от оси провода до точки M. Раскрывая векторное произведение (5), получим

$$\mathbf{H} = -\frac{2Iy}{\rho^2}\mathbf{i} + \frac{2Ix}{\rho^2}\mathbf{j}.$$

Дифференциальные уравнения векторных линий:

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{0},$$

откуда

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2, \\ z = C, \end{cases}$$

т. е. векторные линии являются окружностями с центрами на оси Oz (рис. 15). ▷

Задачи для самостоятельного решения

Найти векторные линии следующих плоских векторных полей:

96. $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$. **97.** $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + z\mathbf{k}$. **98.** $\mathbf{a} = x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$.
99. $\mathbf{a} = 2z\mathbf{j} - 4y\mathbf{k}$. **100.** $\mathbf{a} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j}$. **101.** $\mathbf{a} = z\mathbf{j} - y\mathbf{k}$.

Дифференциальные уравнения векторных линий

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

могут быть записаны так:

$$\frac{dx}{dt} = P, \quad \frac{dy}{dt} = Q, \quad \frac{dz}{dt} = R$$

или в векторной форме:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{a}(M). \tag{6}$$

Эта форма уравнений векторных линий оказывается удобной при решении ряда задач.

Пример 4. Найти векторные линии поля $\mathbf{a} = [\mathbf{c}, \mathbf{r}]$, где $\mathbf{c}$ — постоянный вектор.

<u>*Решение.*</u> Применяя соотношение (6), получим

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = [\mathbf{c}, \mathbf{r}]. \tag{7}$$

Умножая обе части (7) скалярно на **c** и используя свойства смешанного произведения, находим

$$\left(\mathbf{c}, \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(\mathbf{c}, \mathbf{r}) = 0. \tag{8}$$

Аналогично, умножая обе части (7) скалярно на **r**, получим

$$\left(\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}, \mathbf{r}) = 0. \tag{9}$$

Из уравнения (8) следует, что

$$(\mathbf{c}, \mathbf{r}) = \text{const},$$

а из уравнения (9) следует, что

$$(\mathbf{r}, \mathbf{r}) = \text{const}.$$

Векторные линии являются линиями пересечения плоскостей $(\mathbf{c}, \mathbf{r}) = \text{const}$ со сферами $\mathbf{r}^2 = \text{const}$. ▷

Задачи для самостоятельного решения

Найти векторные линии следующих векторных полей:

102. $\mathbf{a} = f(r)\,\mathbf{r}$.

103. $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_0, \mathbf{r})\mathbf{b}_0$, где $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{b}_0$ — постоянные векторы.

§ 11. Поток векторного поля. Способы вычисления потока

1°. Поток векторного поля.

Пусть имеем векторное поле

$$\mathbf{a}(M) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k},$$

где координаты $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ вектора $\mathbf{a}(M)$ непрерывны (поле $\mathbf{a}(M)$ непрерывно) в некоторой области G. Пусть S — некоторая гладкая или кусочно гладкая двухсторонняя поверхность, у которой выбрана определенная сторона (ориентированная поверхность).

Определение. *Потоком* Π векторного поля $\mathbf{a}(M)$ через ориентированную поверхность S называется поверхностный интеграл первого рода по поверхности S от проекции вектора $\mathbf{a}(M)$ на нормаль $\mathbf{n}(M)$ к этой поверхности:

$$\Pi = \iint\limits_S \text{пр}_{\mathbf{n}}\mathbf{a}\,dS = \iint\limits_S (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)\,dS,$$

где $\mathbf{n}^0$ — единичный вектор (орт) нормали $\mathbf{n}$ к выбранной стороне поверхности S; dS — элемент площади поверхности S.

В случае замкнутой поверхности будем всегда выбирать внешнюю нормаль $\mathbf{n}$, которая направлена наружу области, ограниченной поверхностью S.

Если α, β, γ — углы, которые образует с осями координат Ox, Oy, Oz нормаль $\mathbf{n}$ к поверхности S, то поток можно выразить через поверхностный интеграл второго рода

$$\Pi = \iint\limits_S (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)\, dS = \iint\limits_S [P(x,y,z)\cos\alpha + \\ + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma]\, dS,$$

или

$$\Pi = \iint\limits_S (\mathbf{n}, \mathbf{n}^0)\, dS = \iint\limits_S P(x,y,z)\, dy\, dz + \\ + Q(x,y,z)\, dx\, dz + R(x,y,z)\, dx\, dy,$$

где

$$\cos\alpha\, dS = dy\, dz, \quad \cos\beta\, dS = dx\, dz, \quad \cos\gamma\, dS = dx\, dy.$$

Основные свойства потока векторного поля

а) *Поток меняет знак* на обратный с изменением ориентации поверхности (т. е. с изменением ориентации нормали $\mathbf{n}$ к поверхности S):

$$\iint\limits_{S^+} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)\, dS = -\iint\limits_{S^-} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)\, dS,$$

где S^+ — сторона поверхности S, на которой выбрана нормаль $\mathbf{n}$, а S^- — сторона поверхности S, на которой берется нормаль $-\mathbf{n}$.

б) *Свойство линейности*:

$$\iint\limits_S (\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}, \mathbf{n}^0)\, dS = \lambda \iint\limits_S (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)\, dS + \mu \iint\limits_S (\mathbf{b}, \mathbf{n}^0)\, dS,$$

где λ и μ — постоянные числа.

в) *Свойство аддитивности*: если поверхность S состоит из нескольких гладких частей $S_1, S_2, \ldots, S_m$, то поток векторного поля $\mathbf{a}(M)$ через S равен сумме потоков вектора $\mathbf{a}(M)$ через поверхности $S_1, S_2, \ldots, S_m$:

$$\Pi = \sum_{k=1}^{m} \iint\limits_{S_k} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)\, dS.$$

Это свойство позволяет распространить понятие потока на кусочно гладкие поверхности.

Пример 1. Найти поток векторного поля $\mathbf{a} = \mathbf{i}$ через площадку, перпендикулярную оси Ox, имеющую форму прямоугольника со сторонами, равными 1 и 2 (рис. 16), в положительном направлении оси Ox.

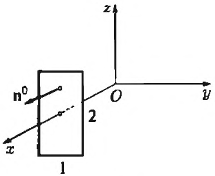

Рис. 16

Решение. Согласно определению потока вектора через поверхность S, будем иметь

$$\Pi = \iint_S (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)\, dS.$$

В нашем случае $\mathbf{a} = \mathbf{i}$, $\mathbf{n}^0 = \mathbf{i}$, так что $(\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) = (\mathbf{i}, \mathbf{i}) = 1$. Учитывая то, что площадь прямоугольника равна 2, получим

$$\Pi = \iint_S 1\, dS = 2. \qquad \triangleright$$

Замечание. Выбрав единичный вектор (орт) нормали к площадке S так, что $\mathbf{n}^0 = -\mathbf{i}$, получили бы $\Pi = -2$.

Пример 2. Вычислить поток векторного поля $\mathbf{a} = \mathbf{r}$, где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, через прямой круговой цилиндр с высотой h, радиусом основания R и осью Oz.

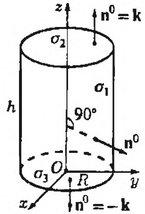

Рис. 17

Решение. Поверхность S состоит из боковой поверхности σ_1, верхнего основания σ_2 и нижнего основания σ_3 цилиндра. Искомый поток Π в силу свойства аддитивности будет равен $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3$, где Π_1, Π_2, Π_3 — потоки данного поля через σ_1, σ_2, σ_3 соответственно (рис. 17).

На боковой поверхности σ_1 цилиндра внешняя нормаль $\mathbf{n}^0$ параллельна плоскости xOy, и поэтому

$$(\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) = (\mathbf{r}, \mathbf{n}^0) = \text{пр}_{\mathbf{n}^0}\mathbf{r} = R$$

Следовательно,

$$\Pi_1 = \iint_{\sigma_1} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)\, dS = R \iint_{\sigma_1} dS = R \cdot 2\pi R h = 2\pi R^2 h.$$

На верхнем основании σ_2 нормаль $\mathbf{n}^0$ параллельна оси Oz, и поэтому можно положить $\mathbf{n}^0 = \mathbf{k}$. Тогда

$$(\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) = (\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \text{пр}_{Oz}\mathbf{r} = h,$$

и значит,

$$\Pi_2 = \iint_{\sigma_2} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)\, dS = h \iint_{\sigma_2} dS = h \cdot \pi R^2 = \pi R^2 h.$$

На нижнем основании σ вектор $\mathbf{a} = \mathbf{r}$ перпендикулярен к нормали $\mathbf{n}^0 = -\mathbf{k}$. Поэтому $(\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) = (\mathbf{r}, -\mathbf{k}) = 0$ и

$$\Pi_2 = \iint\limits_{\sigma} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)\, dS = 0.$$

Искомый поток будет равен

$$\Pi = \oiint\limits_{S} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)\, dS = 3\pi R^2 h. \qquad \triangleright$$

Пример 3. Найти поток векторного поля

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$$

через сферу радиуса R с центром в начале координат.

◁ *Решение.* Так как нормаль $\mathbf{n}$ к сфере коллинеарна радиусу вектору $\mathbf{r}$, то можно взять $\mathbf{n}^0 = \mathbf{r}^0 = \dfrac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$. Поэтому

$$(\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) = \left(\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}, \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}\right) = \frac{1}{|\mathbf{r}|^4}(\mathbf{r}, \mathbf{r}) = \frac{|\mathbf{r}|^2}{|\mathbf{r}|^4} = \frac{1}{|\mathbf{r}|^2}.$$

Но на сфере S имеем $|\mathbf{r}| = R$, поэтому $(\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) = \frac{1}{R^2}$.

Искомый поток Π будет равен

$$\Pi = \oiint\limits_{S} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)\, dS = \frac{1}{R^2} \oiint\limits_{S} dS = 4\pi,$$

так как площадь всей сферы S равна $\oiint\limits_{S} dS = 4\pi R^2$. $\triangleright$

Задачи для самостоятельного решения

104. Вычислить поток векторного поля $\mathbf{a} = 3\mathbf{j}$ через площадку, имеющую форму треугольника с вершинами в точках $M_1(1, 2, 0)$, $M_2(0, 2, 0)$, $M_3(0, 2, 2)$ в сторону, где расположено начало координат.

105. Найти поток векторного поля $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k}$, где α, β, γ — постоянные, через площадку, перпендикулярную оси Oz и имеющую форму круга радиуса R, в положительном направлении оси Oz.

106. Найти поток векторного поля $\mathbf{a} = \mathbf{r}$ через внешнюю сторону кругового конуса, вершина которого находится в начале координат, радиус основания равен R и высота равна h (ось конуса идет по оси Oz).

107. Найти поток векторного поля $\mathbf{a} = f(|\mathbf{r}|)\mathbf{r}$ через сферу радиуса R с центром в начале координат.

2°. Способы вычисления потока вектора.

1. Метод проектирования на одну из координатных плоскостей

Пусть незамкнутая поверхность S проектируется взаимно однозначно на плоскость xOy в область D_{xy}. В этом случае поверхность S можно задать уравнением $z = f(x, y)$, и так как элемент площади dS этой поверхности равен

$$dS = \frac{dx\,dy}{|\cos\gamma|},$$

то вычисление потока П через выбранную сторону поверхности S сводится к вычислению двойного интеграла по формуле

$$\Pi = \iint_S (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)\, dS = \iint_{D_{xy}} \left.\frac{(\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)}{|\cos\gamma|}\right|_{z=f(x,y)} dx\,dy. \tag{1}$$

Здесь орт $\mathbf{n}^0$ нормали к выбранной стороне поверхности S находится по формуле

$$\mathbf{n}^0 = \pm\frac{\operatorname{grad}[z - f(x, y)]}{|\operatorname{grad}[z - f(x, y)]|} = \pm\frac{-\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)\mathbf{i} - \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}}, \tag{2}$$

а $\cos\gamma$ равен коэффициенту при орте $\mathbf{k}$ в формуле (2):

$$\cos\gamma = \pm\frac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}}. \tag{3}$$

Если угол γ между осью Oz и нормалью $\mathbf{n}^0$ острый, то в формулах (2) и (3) берется знак «+», если же угол γ тупой, то берется знак «−». Символ

$$\left.\frac{(\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)}{|\cos\gamma|}\right|_{z=f(x,y)}$$

означает, что в подынтегральной функции вместо z надо подставить $f(x, y)$.

Если оказывается удобным проектировать поверхность S на координатные плоскости yOz или xOz, то для вычисления потока П пользуются соответственно формулами:

$$\Pi = \iint_{D_{yz}} \left.\frac{(\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)}{|\cos\alpha|}\right|_{x=\varphi(y,z)} dy\,dz \tag{4}$$

или

$$\Pi = \iint_{D_{xz}} \left.\frac{(\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)}{|\cos\beta|}\right|_{y=\psi(x,z)} dx\,dz. \tag{5}$$

Формула (4) применяется в случае, когда поверхность S проектируется взаимно однозначно в область D_{yz} плоскости yOz, а значит, ее можно задать уравнением $x = \varphi(y, z)$, $\cos\alpha$ находится как коэффициент при орте $\mathbf{i}$ в формуле

$$\mathbf{n}^0 = \pm\frac{\operatorname{grad}[x-\varphi(y,z)]}{|\operatorname{grad}[x-\varphi(y,z)]|} = \pm\frac{\mathbf{i}-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\mathbf{j}-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\mathbf{k}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}},$$

т. е.

$$\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}}.$$

Знак « + » берется в случае, если угол α между осью Ox и нормалью $\mathbf{n}^0$ острый, если же α — тупой угол, то берут знак « − ».

Формула (5) применяется при взаимно однозначном проектировании поверхности S на плоскость xOz; в этом случае S можно задать уравнением $y = \psi(x, z)$ и тогда

$$\mathbf{n}^0 = \pm\frac{\operatorname{grad}[y-\psi(x,z)]}{|\operatorname{grad}[y-\psi(x,z)]|} = \pm\frac{-\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\mathbf{i}+\mathbf{j}-\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\mathbf{k}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2}},$$

$\cos\beta$ есть коэффициент при орте $\mathbf{j}$ в последней формуле, т. е.

$$\cos\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2}}.$$

Если угол β между осью Oy и нормалью $\mathbf{n}^0$ острый, то берут знак « + », если же угол β тупой, то берут знак « − ».

Замечание. В случае, когда поверхность S задана неявно уравнением $\Phi(x, y, z)$, единичный вектор нормали

$$\mathbf{n}^0 = \mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\cos\beta + \mathbf{k}\cos\gamma$$

находится по формуле

$$\mathbf{n}^0 = \pm\frac{\operatorname{grad}\Phi(x,y,z)}{|\operatorname{grad}\Phi(x,y,z)|} = \pm\frac{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\mathbf{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2}},$$

где знак в правой части определяется выбором нормали к поверхности S

Для вычисления потока П векторного поля **a** через поверхность S надо ее спроектировать взаимно однозначно на какую-либо из координатных плоскостей xOy, xOz, yOz, что возможно сделать, если уравнение $\Phi(x, y, z) = 0$ однозначно разрешимо соответственно относительно z ($z = f(x, y)$), y ($y = \psi(x, z)$) или x ($x = \varphi(y, z)$). После этого воспользоваться одной из формул (1), (4), (5)

Пример 4. Найти поток векторного поля $\mathbf{a} = (x - 2z)\mathbf{i} + (x + 3y + z)\mathbf{j} + (5x + y)\mathbf{k}$ через верхнюю сторону треугольника ABC с вершинами в точках $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$.

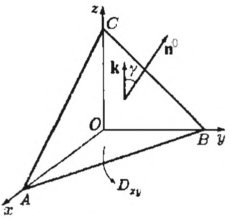

Рис. 18

Решение. Уравнение плоскости, в которой лежит треугольник ABC, имеет вид $x + y + z = 1$, откуда $z = 1 - x - y$. Треугольник ABC проектируется взаимно однозначно на плоскость xOy в область D_{xy}, которой является треугольник OAB (рис 18).

По условию нормаль $\mathbf{n}^0$ к плоскости, в которой лежит треугольник ABC, образует острый угол γ с осью Oz, поэтому в формуле (2) берем знак плюс и получаем

$$\mathbf{n}^0 = \frac{\operatorname{grad}(x + y + z - 1)}{|\operatorname{grad}(x + y + z - 1)|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}. \tag{6}$$

Находим скалярное произведение

$$(\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) = (x - 2z)\frac{1}{\sqrt{3}} + (x + 3y + z)\frac{1}{\sqrt{3}} + (5x + y)\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{7x + 4y - z}{\sqrt{3}}$$

Из формулы (6) получаем, что $\cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{3}} > 0$ и, значит

$$dS = \frac{dx\,dy}{\cos\gamma} = \sqrt{3}\,dx\,dy.$$

Применяя формулу (1), вычисляем искомый поток:

$$\Pi = \iint_S (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)\,dS = \iint_{D_{xy}} (7x + 4y - z)\Big|_{z=1-x-y}\,dx\,dy =$$

$$= \iint_{D_{xy}} (8x + 5y - 1)\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (8x + 5y - 1)\,dy = \frac{5}{3}. \qquad \triangleright$$

Пример 5. Найти поток векторного поля $\mathbf{a} = y^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ через часть поверхности $z = x^2 + y^2$, отсеченной плоскостью $z = 2$. Нормаль берется внешняя по отношению к области, ограниченной параболоидом

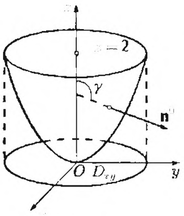

Рис. 19

Решение. Данная поверхность (параболоид вращения) проектируется взаимно однозначно на плоскость xOy в круг D_{xy} (рис. 19). Находим орт нормали $\mathbf{n}^0$ к поверхности S:

$$\mathbf{n}^0 = \pm\frac{\operatorname{grad}(z - x^2 - y^2)}{|\operatorname{grad}(z - x^2 - y^2)|} = \pm\frac{-2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}.$$

По условию задачи нормаль $\mathbf{n}^0$ образует тупой угол γ с осью Oz, поэтому перед дробью следует взять знак минус. Таким образом,

$$\mathbf{n}^0 = \frac{2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - \mathbf{k}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}.$$

Отсюда

$$\cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} < 0$$

и, значит,

$$dS = \frac{dx\,dy}{|\cos\gamma|} = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\,dx\,dy.$$

Находим скалярное произведение

$$(\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) = \frac{2y^3 - z}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}.$$

Искомый поток в силу формулы (1) равен

$$\Pi = \iint\limits_S (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)\,dS = \iint\limits_{D_{xy}} (2y^3 - z)\big|_{z=x^2+y^2}\,dx\,dy = \iint\limits_{D_{xy}} (2y^3 - y^2 - x^2)\,dx\,dy.$$

Область интегрирования D_{xy} есть круг с центром в начале координат радиуса $R = \sqrt{2}$. Вводя полярные координаты $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, будем иметь

$$\Pi = \iint\limits_{D_{xy}} (2\rho^3\sin^3\varphi - \rho^2)\rho\,d\rho\,d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} (2\rho^4\sin^3\varphi - \rho^3)\,d\rho = -2\pi\frac{\rho^4}{4}\Big|_0^{\sqrt{2}} = -2\pi. \qquad \triangleright$$

Пример 6. Найти поток векторного поля $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$ через круг S, полученный сечением шара $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$ плоскостью $y = x$. Взять сторону круга, обращенную к положительной части оси Ox.

Решение. Так как плоскость $y = x$ перпендикулярна координатной плоскости xOy, то круг S, лежащий на этой плоскости, проектируется на плоскость xOy в отрезок A_1A_2 и, значит, нарушается взаимная однозначность проектирования. На другие координатные плоскости круг S проектируется взаимно однозначно. Проектируя круг, например, на плоскость xOz, получим область D_{xz}

ограниченную эллипсом (рис. 20). Уравнение эллипса найдем, исключив y из системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ y = x. \end{cases}$$

Отсюда

$$2x^2 + z^2 = R^2, \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{R^2/2} + \frac{z^2}{R^2} = 1.$$

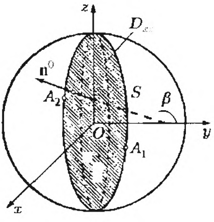

Рис. 20

По условию нормаль к кругу S образует тупой угол β с осью Oy, поэтому берем

$$\mathbf{n} = -\operatorname{grad}(y - x) = \mathbf{i} - \mathbf{j},$$

отсюда

$$\mathbf{n}^0 = \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}.$$

Из последнего равенства имеем $\cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{2}} < 0$. Элемент площади dS круга равен

$$dS = \frac{dx\,dz}{|\cos\beta|} = \sqrt{2}\,dx\,dz.$$

Находим скалярное произведение: $(\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) = \sqrt{2}$.

Искомый поток по формуле (5) равен

$$\Pi = \iint\limits_{D_{xz}} 2\,dx\,dz = \iint\limits_{D_{xz}} dx\,dz = 2\cdot\frac{\pi R^2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}R^2\pi,$$

так как площадь Q области D_{xz}, ограниченной эллипсом с полуосями $a = \frac{R}{\sqrt{2}}$ и $b = R$, равна

$$Q = \iint\limits_{D_{xz}} dx\,dz = \pi ab = \frac{\pi R^2}{\sqrt{2}}. \qquad \triangleright$$

Пример 7. Вычислить поток векторного поля $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ через внешнюю сторону боковой поверхности кругового цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$, ограниченной плоскостями $z = 0$ и $z = H$ $(H > 0)$.

Решение. Данный цилиндр проектируется на плоскость xOy в линию, а именно, в окружность (рис. 21)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2, \\ z = 0. \end{cases}$$

Поэтому будем проектировать цилиндр на другие координатные плоскости, например, на плоскость yOz. Так как цилиндр проектируется на плоскость yOz не взаимно однозначно, то воспользуемся свойством аддитивности потока вектора и представим искомый поток Π в виде суммы потоков $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2$, где Π_1 — поток поля через часть S_1 цилиндра, расположенную в области, где $y \geqslant 0$, а Π_2 —

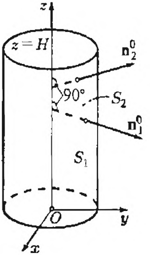

Рис. 21

поток этого же поля через часть S_2 цилиндра, расположенную в области, где $y < 0$. На S_1 имеем

$$n^0 = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{R}, \quad (\mathbf{a}, \mathbf{n}) = \frac{x^2 + y^2}{R} = R.$$

Следовательно

$$\Pi_1 = \iint\limits_{S_1} R\,dS = R \iint\limits_{S} dS = RS,$$

где S — площадь части S_1 цилиндра. Так как $S = \pi RH$, то $\Pi_1 = \pi R^2 H$.

На S_2 опять имеем

$$n^0 = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{R}, \quad (\mathbf{a}, n^0) = \frac{x^2 + y^2}{R} = R$$

и, значит,

$$\Pi_2 = \iint\limits_{S_2} R\,dS = RS = \pi R^2 H.$$

Искомый поток равен $\Pi = 2\pi R^2 H$. ▷

Замечание. Задача решается проще, если на цилиндре ввести криволинейные координаты $x = R\cos\varphi$, $y = R\sin\varphi$, $z = z$ (см. далее п. 3).

Для нахождения потока векторного поля $\mathbf{a} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$ через поверхность S, заданную уравнением $z = f(x, y)$ методом проектирования на координатную плоскость, не обязательно находить орт $\mathbf{n}^0$ нормали, а можно брать вектор

$$\mathbf{n} = \pm \operatorname{grad}[z - f(x, y)] = \pm\left(-\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}\right).$$

Тогда формула (1) для вычисления потока Π примет вид

$$\Pi = \iint\limits_{S} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)\,dS = \iint\limits_{D_{xy}} (\mathbf{a}, \mathbf{n})\big|_{z=f(x,y)}\,dx\,dy \qquad (7)$$

Аналогично получаются формулы для вычисления потоков через поверхности, заданные уравнениями $x = \varphi(y, z)$ или $y = \psi(x, z)$

Формула (7) в координатной форме записывается так:

$$\Pi = \pm \iint\limits_{D_{xy}} \left\{ -P[x, y, f(x, y)]\frac{\partial f}{\partial x} - \right.$$

$$\left. - Q[x, y, f(x, y)]\frac{\partial f}{\partial y} + R[x, y, f(x, y)] \right\} dx\,dy.$$

Пример 8. Вычислить поток векторного поля $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \sqrt{x^2+y^2-1}\,\mathbf{k}$ через внешнюю сторону однополостного гиперболоида $z = \sqrt{x^2+y^2-1}$, ограниченного плоскостями $z = 0$, $z = \sqrt{3}$.

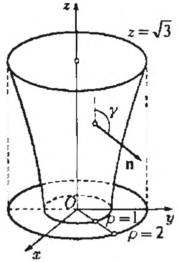

Рис. 22

Решение. Данная поверхность проектируется взаимно однозначно на плоскость xOy в область D_{xy}, ограниченную окружностями

$$\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ z=0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x^2+y^2=4, \\ z=0. \end{cases}$$

Находим внешнюю нормаль $\mathbf{n}$:

$$\mathbf{n} = \pm \operatorname{grad}\left(z - \sqrt{x^2+y^2-1}\right) = \pm\left(\frac{-x\mathbf{i}-y\mathbf{j}}{\sqrt{x^2+y^2-1}} + \mathbf{k}\right).$$

Так как $\mathbf{n}$ образует с осью Oz тупой угол γ (рис. 22), то берем знак минус и, значит,

$$\mathbf{n} = \frac{x\mathbf{i}-y\mathbf{j}}{\sqrt{x^2+y^2-1}} - \mathbf{k}.$$

Находим скалярное произведение

$$(\mathbf{a}, \mathbf{n}) = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2-1}} - \sqrt{x^2+y^2-1} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}.$$

Применяя формулу (7), получим

$$\Pi = \iint_S (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)\,dS = \iint_{D_{xy}} \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2-1}}.$$

Переходя к полярным координатам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ будем иметь

$$\Pi = \iint_{D_{xy}} \frac{\rho\,d\rho\,d\varphi}{\sqrt{\rho^2-1}} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^2 \frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{\rho^2-1}} = 2\pi\sqrt{\rho^2-1}\,\Big|_1^2 = 2\sqrt{3}\pi. \qquad \triangleright$$

Пример 9. Вычислить поток векторного поля $\mathbf{a} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ через замкнутого поверхность, ограниченную цилиндром $x^2 + y^2 = R^2$ и плоскостями $z = x$, $z = 0$ $(z \geqslant 0)$.

Решение. Поверхность S кусочно гладкая, поэтому воспользуемся свойством аддитивности потока, представляя искомый поток Π в виде суммы потоков Π_1, Π_2, Π_3 через гладкие куски, соответственно, S_1 (полукруг $x^2+y^2 \leqslant R^2$, $0 \leqslant x \leqslant R$, $z = 0$), S_2 (часть плоскости $z = x$) и S_3 (часть цилиндра $x^2+y^2 = R^2$): $\Pi = \Pi_1+\Pi_2+\Pi_3$. Так как S замкнута, то берем внешнюю нормаль к ней (рис 23).

1) На S_1, где $z = 0$, имеем $\mathbf{n}^0 = -\mathbf{k}$, поэтому

$$(\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) = -x,$$

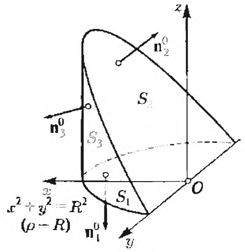

Рис. 23

и, значит, поток Π_1 будет равен

$$\Pi_1 = -\iint\limits_{S_1} x\,dS = -\iint\limits_{D_1} x\,dx\,dy.$$

Переходя к полярным координатам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, найдем

$$\Pi_1 = -\iint\limits_{D_1} \rho\cos\varphi\cdot\rho\,d\rho\,d\varphi =$$

$$= -\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\varphi\,d\varphi\int\limits_0^R \rho^2\,d\rho = -\frac{2}{3}R^3.$$

2) На S_2, где $z = x$, имеем

$$\mathbf{n} = \pm\,\mathrm{grad}\,(z-x) = \pm(-\mathbf{i}+\mathbf{k}),$$

и так как нормаль $\mathbf{n}$ к S_2 образует с осью Oz острый угол, то в правой части берем знак плюс. Таким образом, $\mathbf{n} = -\mathbf{i}+\mathbf{k}$ и, значит, $(\mathbf{a},\mathbf{n}) = x - y$.

Проектируя S_2 на плоскость xOy, получим полукруг

$$D_{xy}:\ 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{R^2-y^2}.$$

Тогда по формуле (6) будем иметь

$$\Pi_2 = \iint\limits_{D_{xy}} (\mathbf{a},\mathbf{n})\big|_{z=x}\,dx\,dy,$$

и снова переходя к полярным координатам, найдем

$$\Pi_2 = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos\varphi-\sin\varphi)\,d\varphi\int\limits_0^R \rho^2\,d\rho = \frac{2}{3}R^3.$$

3) На S_3, где $x^2+y^2=R^2$, т. е. на боковой поверхности цилиндра, имеем

$$\mathbf{n}^0 = \pm\frac{\mathrm{grad}\,(x^2+y^2-R^2)}{|\mathrm{grad}\,(x^2+y^2-R^2)|} = \pm\frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \pm\frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}}{R}.$$

В этом случае нормаль $\mathbf{n}$ образует с осью Oz прямой угол и, значит, $\cos\gamma = 0$. Выбор знака обусловлен тем, что внешняя нормаль должна составлять острый угол с осью Ox. Поэтому выбираем $\mathbf{n}^0$ равным

$$\mathbf{n}^0 = \frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}}{R}, \qquad (\mathbf{a},\mathbf{n}^0) = \frac{(x+z)y}{R},$$

и, следовательно,

$$\Pi_3 = \frac{1}{R}\iint\limits_{S_3}(x+z)y\,dS.$$

Проектировать поверхность S_3 (прямой цилиндр) на плоскость xOy нельзя, так как она спроектируется в линию — полуокружность (будет нарушена взаимная однозначность проектирования). То же самое имеет место и в случае проектирования на плоскость xOz. Поэтому будем проектировать поверхность S_3 на плоскость yOz, на которую она проектируется взаимно однозначно в область D_{yz}, ограниченную линией

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2, \\ z = x. \end{cases}$$

Исключая отсюда x, получим уравнение проекции этой линии на плоскость zOy: $z^2 + y^2 = R^2$ — окружность. Так как

$$\cos\alpha = \left|\cos(\widehat{\mathbf{n}_3^0, \mathbf{i}})\right| = \left|(\mathbf{n}_3^0, \mathbf{i})\right| = \left|\frac{x}{R}\right| = \frac{x}{R} \quad (x \geqslant 0),$$

то будем иметь

$$\Pi_3 = \frac{1}{R}\iint\limits_{D_{yz}} \frac{(x+z)y}{|\cos\alpha|}\bigg|_{x=z} dy\,dz =$$

$$= \iint\limits_{D_{yz}} \frac{(x+z)y}{x}\bigg|_{x=z} dy\,dz = \iint\limits_{D_{yz}} \frac{2zy}{z}\,dy\,dz = 2\iint\limits_{D_{yz}} y\,dy\,dz.$$

Используя полярные координаты: $y = \rho\cos\varphi$, $z = \rho\sin\varphi$, найдем

$$\Pi_3 = 2\iint\limits_{D_{yz}} \rho\cos\varphi \cdot \rho\,d\rho\,d\varphi = 2\int\limits_0^{\pi}\cos\varphi\,d\varphi \int\limits_0^R \rho^2\,d\rho = 0.$$

Итак,

$$\Pi = -\frac{2}{3}\pi R^3 + \frac{2}{3}\pi R^3 + 0 = 0. \qquad \triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

108. Вычислить поток векторного поля $\mathbf{a} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ через верхнюю сторону треугольника, ограниченного плоскостями $x + y + z = a$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

109. Вычислить поток векторного поля $\mathbf{a} = xz\mathbf{i}$ через внешнюю сторону параболоида $z = 1 - x^2 - y^2$, ограниченного плоскостью $z = 0$ $(z \geqslant 0)$.

110. Вычислить поток векторного поля $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + z\mathbf{k}$ через боковую поверхность кругового цилиндра $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, ограниченную плоскостями $z = 0$, $z = h$ $(h > 0)$.

111. Вычислить поток векторного поля $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ через верхнюю сторону круга, вырезаемого конусом $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ на плоскости $z = h$ $(h > 0)$.

112. Вычислить поток векторного поля $\mathbf{a} = 3x\mathbf{i} - y\mathbf{j} - z\mathbf{k}$ через внешнюю сторону параболоида $x^2 + y^2 = 9 - z$, расположенную в первом октанте.

113. Вычислить поток векторного поля $\mathbf{a} = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + (y^2 + z^2)\mathbf{j} + (z^2 + x^2)\mathbf{k}$ через часть плоскости $z = 0$, ограниченную окружностью $x^2 + y^2 = 1$, в направлении орта $\mathbf{k}$.

114. Вычислить поток векторного поля $\mathbf{a} = yz\mathbf{i} - x\mathbf{j} - y\mathbf{k}$ через полную поверхность конуса $x^2 + y^2 = z^2$, ограниченную плоскостью $z = 1$ $(0 \leqslant z \leqslant 1)$.

115. Вычислить поток векторного поля $\mathbf{a} = 2x\mathbf{i} + (1-2y)\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$ через замкнутую поверхность, ограниченную параболоидом $x^2 + z^2 = 1 - 2y$ $(y \geqslant 0)$ и плоскостью $z = 0$ $(z \geqslant 0)$.

116. Вычислить поток векторного поля $\mathbf{a} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ через полную поверхность пирамиды, ограниченной плоскостями $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$.

117. Вычислить поток векторного поля $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ через сферу $x^2 + y^2 = R^2$.

2. Метод проектирования на все три координатные плоскости

Пусть поверхность S взаимно однозначно проектируется на все три координатные плоскости. Обозначим через D_{xy}, D_{xz}, D_{yz} проекции S соответственно на плоскости xOy, xOz, yOz.

В этом случае уравнение $F(x, y, z) = 0$ поверхности S однозначно разрешимо относительно каждого из аргументов x, y, z так что

$$x = x(y, z), \qquad y = y(x, z), \qquad z = z(x, y).$$

Тогда поток векторного поля

$$\mathbf{a} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

через поверхность S, единичный вектор нормали к которой равен

$$\mathbf{n}^0 = \cos\alpha\mathbf{i} + \cos\beta\mathbf{j} + \cos\gamma\mathbf{k}$$

можно записать так:

$$\Pi = \iint\limits_S (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)\,dS = \iint\limits_S \big[P(x, y, z)\cos\alpha + {} \\ + Q(x, y, z)\cos\beta + R(x, y, z)\cos\gamma\big]\,dS. \qquad (8)$$

Известно, что

$$\begin{aligned} dS\cos\alpha &= \pm dy\,dz, \\ dS\cos\beta &= \pm dx\,dz \\ dS\cos\gamma &= \pm dx\,dy \end{aligned} \qquad (9)$$

причем знак в каждой из формул (9) выбирается таким, каков знак $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ на поверхности S. Подставляя (9) в (8), будем иметь

$$\Pi = \pm \iint\limits_{D_{yz}} P[x(y, z), y, z]\,dy\,dz \pm \\ \pm \iint\limits_{D_{xz}} Q[x, y(x, z), z]\,dx\,dz \pm \iint\limits_{D_{xy}} R[x, y, z(x, y)]\,dx\,dy. \qquad (10)$$

Пример 10. Найти поток векторного поля $\mathbf{a} = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$ через часть внешней стороны сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, заключенной в первом октанте.

Решение. Имеем

$$n^0 = \frac{\operatorname{grad}(x^2+y^2+z^2-1)}{|\operatorname{grad}(x^2+y^2+z^2-1)|} = \frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k},$$

откуда, учитывая, что данная поверхность S находится в первом октанте, получим

$$\cos\alpha = x \geqslant 0, \quad \cos\beta = y \geqslant 0, \quad \cos\gamma = z \geqslant 0.$$

Поэтому в формуле (10) берем перед всеми интегралами знак плюс и, полагая в ней

$$P = xy, \quad Q = yz, \quad R = xz,$$

получим

$$\Pi = \iint\limits_{D_{yz}} xy\,dy\,dz + \iint\limits_{D_{xz}} yz\,dx\,dz + \iint\limits_{D_{xy}} xz\,dx\,dy. \tag{11}$$

Из уравнения сферы $x^2+y^2+z^2=1$, находим

$$z = z(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2},$$
$$y = y(x,z) = \sqrt{1-x^2-z^2},$$
$$x = x(y,z) = \sqrt{1-y^2-z^2}.$$

Подставляя эти выражения для x, y, z соответственно в третий, второй и первый интегралы правой части (11), получим

$$\Pi = \iint\limits_{D_{xy}} x\sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy +$$
$$+ \iint\limits_{D_{xz}} z\sqrt{1-x^2-z^2}\,dx\,dz + \iint\limits_{D_{yz}} y\sqrt{1-y^2-z^2}\,dy\,dz. \tag{12}$$

Вычислим первый интеграл, стоящий в правой части, переходя к полярным координатам $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, где $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$, $0\leqslant\rho\leqslant1$. Тогда получим

$$I = \iint\limits_{D_{xy}} x\sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy = \iint\limits_{D_{xy}} \rho^2\sqrt{1-\rho^2}\cos\varphi\,d\varphi\,d\rho =$$
$$= \int\limits_0^{\pi/2}\cos\varphi\,d\varphi\int\limits_0^1\rho^2\sqrt{1-\rho^2}\,d\rho = \int\limits_0^1\rho^2\sqrt{1-\rho^2}\,d\rho.$$

Полагая в последнем интеграле $\rho=\sin t$, $d\rho=\cos t\,dt$, будем иметь

$$I_1 = \int\limits_0^{\pi/2}\sin^2 t\cos^2 t\,dt = \frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2 2t\,dt = \frac{\pi}{16}.$$

Второй и третий интегралы в формуле (1) вычисляются аналогично при этом получим

$$I = \iint\limits_D z\,(1 - x - z^2)\,dx\,dz = \frac{\pi}{16}$$

$$I_3 = \iint\limits_D y\sqrt{1 - y - z}\,dy\,dz = \frac{\pi}{16}$$

Искомый поток будет равен

$$\Pi = I + I + I = \frac{3\pi}{16} \qquad \triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

118. Применяя метод проектирования на все три координатные плоскости вычислить поток векторного поля через поверхность S

а) $\mathbf{a} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$

S — верхняя сторона ограниченной части плоскости $3x + 6y - 2z = 6$ вырезаемой координатными плоскостями,

б) $\mathbf{a} = (x + y + z)\mathbf{i} + (x + y + z - 1)\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

S — верхняя сторона части плоскости $x + y + z = 1$ лежащей в первом октанте,

в) $\mathbf{a} = (x - \sqrt{y}\quad)\mathbf{i} + \mathbf{j} + (\sqrt{y} - x^2\quad)\mathbf{k}$

S — внешняя сторона параболоида вращения $y = \quad z^2$ ограниченная плоскостью $y = 4$ и лежащая в первом октанте

3 Метод введения криволинейных координат на поверхности

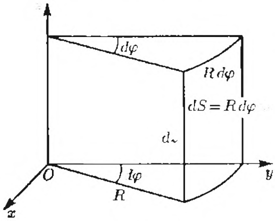

Рис. 24

В некоторых случаях при вычислении потока векторного поля через данную поверхность S возможно выбирать на самой поверхности простую систему координат, в которой удобно вычислять поток не применяя проектирования на координатные плоскости

Рассмотрим частные случаи

Случай 1 Пусть поверхность S является частью кругового цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$ ограниченного поверхностями $z = f_2(x, y)$ и $z = f_1(x, y)$ причем $f_1(x, y) \quad f_2(x, y)$

Полагая

$$x = R\cos\varphi \qquad y = R\sin\varphi \qquad z = z$$

будем иметь для данной поверхности

$$0 \quad \varphi \leqslant 2\pi \qquad f_1(R\cos\varphi, R\sin\varphi) \qquad\quad f_2(R\cos\varphi, R\sin\varphi)$$

для элемента площади dS получаем следующее выражение (рис 24)

$$dS = R\,d\varphi\,dz$$

Тогда поток векторного поля **a** через внешнюю сторону поверхности S вычисляется по формуле

$$\Pi = R\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{f_1(R\cos\varphi,\,R\sin\varphi)}^{f_2(R\cos\varphi,\,R\sin\varphi)} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)\,dz \tag{13}$$

где

$$\mathbf{n}^0 = \frac{\operatorname{grad}(x^2 + y^2 - R^2)}{|\operatorname{grad}(x^2 + y^2 - R^2)|} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{R}$$

Пример 11 Найти поток векторного поля $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ через внешнюю сторону боковой поверхности кругового цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$ ограниченного плоскостями $z = 0$ и $z = H$ $(H > 0)$

Решение В данном случае имеем

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad f_1(R\cos\varphi, R\sin\varphi) = 0, \quad f_2(R\cos\varphi, R\sin\varphi) = H$$

Введем на цилиндре криволинейные координаты

$$x = R\cos\varphi, \quad y = R\sin\varphi, \quad z = z$$

Тогда искомый поток векторного поля **r** будет равен

$$\Pi = R\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^H (\mathbf{r}, \mathbf{n}^0)\,dz$$

Так как

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = R\cos\varphi\,\mathbf{i} + R\sin\varphi\,\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

нормаль $\mathbf{n}^0$ на цилиндре

$$\mathbf{n}^0 = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{R} = \frac{R\cos\varphi\,\mathbf{i} + R\sin\varphi\,\mathbf{j}}{R} = \cos\varphi\,\mathbf{i} + \sin\varphi\,\mathbf{j}$$

то скалярное произведение на цилиндре будет равно

$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}^0) = R\cos^2\varphi + R\sin^2\varphi = R$$

Окончательно находим

$$\Pi = R^2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^H dz = 2\pi R^2 H \qquad \triangleright$$

Пример 12 Вычислить поток радиуса вектора $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ через боковую поверхность кругового цилиндра $x^2 + y^2 = 1$ ограниченного снизу плоскостью $x + y + z = 1$ а сверху — плоскостью $x + y + z = 2$

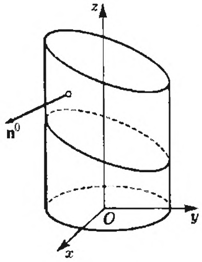

Рис. 25

Решение. В данном случае (рис. 25) имеем

$$R = 1, \quad f_1(x, y) = 1 - x - y, \quad f_2(x, y) = 2 - x - y.$$

Переходя к координатам на цилиндре

$$x = \cos\varphi, \quad y = \sin\varphi, \quad z = z,$$

будем иметь

$$f_1(x, y) = 1 - \cos\varphi - \sin\varphi,$$
$$f_2(x, y) = 2 - \cos\varphi - \sin\varphi.$$

Согласно формуле (13) поток векторного поля $\mathbf{r}$ будет равен

$$\Pi = R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{1-\cos\varphi-\sin\varphi}^{2-\cos\varphi-\sin\varphi} (\mathbf{r}, \mathbf{n}^0)\, dz.$$

Но так как на цилиндре $x^2 + y^2 = 1$

$$\mathbf{n}^0 = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = \cos\varphi\mathbf{i} + \sin\varphi\mathbf{j},$$

то

$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}^0) = x^2 + y^2 = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$$

и, следовательно,

$$\Pi = R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{1-\cos\varphi-\sin\varphi}^{2-\cos\varphi-\sin\varphi} dz = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi. \qquad \triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

119. Найти поток векторного поля $\mathbf{a} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} - e^{xyz}\mathbf{k}$ через внешнюю сторону боковой поверхности цилиндра $x^2 + y^2 = 4$, ограниченной плоскостями $z = 0$ и $x + y + z = 4$.

120. Найти поток векторного поля $\mathbf{a} = x\mathbf{i} - xy\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ через внешнюю сторону цилиндрической поверхности $x^2 + z^2 = R^2$, ограниченной плоскостями $y = 1$ и $x + y = 4$.

121. Найти поток векторного поля $\mathbf{a} = x^3\mathbf{i} - y^3\mathbf{j} + xz^3\mathbf{k}$ через внешнюю сторону цилиндрической поверхности $x^2 + y^2 = 0$, ограниченной сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

122. Найти поток векторного поля $\mathbf{a} = x\mathbf{i} - y\mathbf{j} - xyz^3\mathbf{k}$ через внешнюю сторону боковой поверхности цилиндра $x^2 + y^2 = 1$, ограниченной плоскостью $z = 0$ и гиперболическим параболоидом $z = x^2 - y^2$.

123. Найти поток векторного поля $\mathbf{a} = (xy - y^2)\mathbf{i} + (2x - x^2 + xy)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ через внешнюю сторону боковой поверхности цилиндра $x^2 + y^2 = 1$, ограниченной эллиптическим конусом $z^2 = \dfrac{x^2}{2} + y^2$.

Случай 2. Пусть поверхность S является частью сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, ограниченной коническими поверхностями, уравнения которых в сферических координатах имеют вид $\theta = f(\varphi)$, $\theta = f_2(\varphi)$ и полуплоскостями $\varphi = \varphi$, $\varphi = \varphi_2$

Положим для точек данной сферы

$$x = R\cos\varphi\sin\theta,$$
$$y = R\sin\varphi\sin\theta,$$
$$z = R\cos\theta,$$

где $\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2$, $\theta \leqslant \theta \leqslant \theta_2$ Тогда для элемента площади S получим (рис. 26)

$$dS = R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

В этом случае поток векторного поля $\mathbf{a}$ через внешнюю часть S сферы вычисляется по формуле

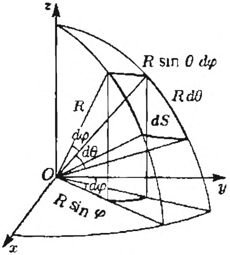

Рис. 26

$$\Pi - R^2 \int\limits_{\varphi}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\theta}^{\theta_2} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) \sin\theta\, d\theta, \qquad (14)$$

где

$$\mathbf{n}^0 = \frac{\operatorname{grad}(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)}{\operatorname{grad}(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)|} - \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \quad z\mathbf{k}}{R}.$$

Пример 13. Найти поток векторного поля $\mathbf{a} = (x - 2y + 1)\mathbf{i} + (2x + y - 3z)\mathbf{j} + (3y + z)\mathbf{k}$ через часть поверхности сферы $x^2 \quad y^2 + z^2$, расположенную в первом октанте, в область, где $x^2 + y^2 + z^2 > 1$.

Решение. В данном случае имеем

$$R = \mathbf{i}, \quad \varphi = 0 \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{2},$$

$$\theta = 0, \quad \theta_2 = \frac{\pi}{2} \quad \mathbf{n}^0 = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) = x^2 + y^2 + z^2 + x.$$

Введем на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ координаты φ и θ так, что

$$x = \cos\varphi\sin\theta, \quad y = \sin\varphi\sin\theta, \quad z = \cos\theta.$$

Тогда будем иметь

$$(\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) = 1 + \cos\varphi\sin\theta$$

и применяя формулу (14), получим

$$\Pi = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} (1 + \cos\varphi\sin\theta)\sin\theta\, d\theta =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta\, d\theta + \int\limits_0^{\pi/2} \cos\varphi\, d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \sin^2\theta\, d\theta = \frac{3}{4}\pi. \qquad \triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

124. Найти поток векторного поля $\mathbf{a}=x\,\mathbf{i}-y\,\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ через внешнюю сторону части сферы $x^2+y^2+z^2=1$, вырезаемой конической поверхностью $z^2=x^2+y^2$ $(z \geqslant \sqrt{x^2+y^2})$.

125. Найти поток векторного поля $\mathbf{a}=yz\mathbf{i}+xz\mathbf{j}+xy\mathbf{k}$ через внешнюю сторону части сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$, расположенную в первом октанте.

126. Найти поток радиуса вектора $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ через внешнюю сторону части сферы $x^2+y^2+z^2=2$, ограниченной плоскостями $z=0$, $z=y$.

127. Найти поток векторного поля $\mathbf{a}=xz\mathbf{i}+yz\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$ через внешнюю часть сферы $x^2+y^2+z^2=9$, отсеченной плоскостью $z=0$ $(z \geqslant 2)$.

§ 12. Поток вектора через замкнутую поверхность. Теорема Гаусса—Остроградского

Теорема. *Если в некоторой области G пространства координаты вектора*

$$\mathbf{a}=P(x,y,z)\mathbf{i}+Q(x,y,z)\mathbf{j}+R(x,y,z)\mathbf{k}$$

непрерывны и имеют непрерывные частные производные $\dfrac{\partial P}{\partial x}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial y}$, $\dfrac{\partial R}{\partial z}$, то поток векторного поля $\mathbf{a}$ через любую замкнутую кусочно гладкую поверхность Σ, расположенную в области G, равен тройному интегралу от $\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}$ по области V, ограниченной поверхностью Σ:

$$\Pi=\oiint\limits_{\Sigma}(\mathbf{a},\mathbf{n}^0)\,d\sigma=\iiint\limits_{V}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv \tag{1}$$

(формула Гаусса—Остроградского).

Нормаль $\mathbf{n}$ к поверхности Σ берется внешняя.

Пример 1. Вычислить поток векторного поля $\mathbf{a}=x^2\mathbf{i}+y^2\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$ через замкнутую поверхность $x^2+y^2+z^2=R^2$, $z=0$ $(z>0)$.

<u>Решение</u>. По формуле (1)

$$\Pi=\iiint\limits_{V}(2x+2y+2z)\,dv. \tag{2}$$

Интеграл (2) удобно вычислять в сферических координатах r, θ, φ. Имеем

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,\quad y=r\sin\theta\sin\varphi,\quad z=r\cos\theta$$

и элемент объема

$$dv=r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi,$$

так что

$$\Pi = 2\iiint\limits_V (r\sin\theta\cos\varphi + r\sin\theta\sin\varphi + r\cos\theta)r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi =$$

$$= 2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta(\sin\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi + \cos\theta)\,d\theta \int\limits_0^R r^3\,dr =$$

$$= \frac{2R^4}{4}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \cos\theta\sin\theta\,d\theta = \frac{\pi R^4}{2}. \qquad \triangleright$$

Пример 2. Вычислить поток векторного поля $\mathbf{a} = 4x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ через поверхность тора.

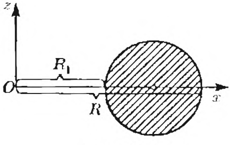

Рис. 27

◁ *Решение.* Воспользовавшись теоремой Гаусса—Остроградского, получим, что искомый поток П равен

$$\Pi = \oiint\limits_S (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)\,d\sigma = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dv = 4V,$$

где V — объем тора. Чтобы вычислить объем V, воспользуемся теоремой Гульдена об объеме тела вращения, в силу которой этот объем равен произведению площади вращающейся фигуры на путь, описываемый центром масс этой фигуры при вращении.

Пусть R_1 и R_2 — внутренний и внешний радиусы тора (рис. 27). Площадь S круга, который при вращении образует тор, равна

$$S = \pi\left(\frac{R_2 - R_1}{2}\right)^2.$$

Длина пути, описываемого центром масс — центром этого круга, — есть длина l окружности радиуса $\frac{(R_2 + R_1)}{2}$, т. е.

$$l = 2\pi\frac{R_2 + R_1}{2} = \pi(R_2 + R_1).$$

Таким образом, объем V тора равен

$$V = \pi\left(\frac{R_2 - R_1}{2}\right)^2 \pi(R_2 + R_1) = \frac{\pi^2}{4}(R_2 - R_1)^2(R_2 + R_1).$$

Искомый поток

$$\Pi = \pi^2(R_2 - R_1)^2(R_2 + R_1). \qquad \triangleright$$

Пример 3. Используя теорему Гаусса—Остроградского, вычислить поток векторного поля

$$\mathbf{a} = \left(\frac{x^2y}{1+y^2} + 6yz^2\right)\mathbf{i} + 2x\,\mathrm{arctg}\,y\,\mathbf{j} - \frac{2xz(1+y) + 1 + y^2}{1+y^2}\mathbf{k}$$

через внешнюю сторону части поверхности $z = 1 - x^2 - y^2$, расположенной над плоскостью xOy.

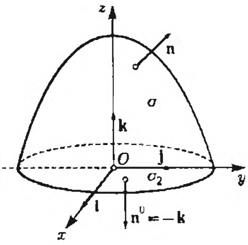

Рис. 28

Решение. Для того чтобы можно было применить теорему Гаусса—Остроградского, замкнем снизу данную поверхность участком плоскости xOy, который ограничен окружностью

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0. \end{cases}$$

Пусть V — объем полученного тела, ограниченного замкнутой кусочно гладкой поверхностью σ, состоящей из части σ_1 параболоида вращения $z = 1 - x^2 - y^2$ и части σ_2 плоскости $z = 0$ (рис. 28).

Поток данного вектора через поверхность σ по теореме Гаусса—Остроградского равен

$$\Pi = \oiint_{\sigma} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)\, d\sigma = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv.$$

Находим сумму

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{2xy}{1 + y^2} + \frac{2x}{1 + y^2} - \frac{2x(1 + y)}{1 + y^2} \equiv 0.$$

Следовательно, поток

$$\Pi = \oiint_{\sigma} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)\, d\sigma = 0$$

В силу аддитивности потока будем иметь

$$\Pi = \iint_{\sigma_1} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)\, d\sigma + \iint_{\sigma_2} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)\, d\sigma = 0.$$

Отсюда искомый поток

$$\Pi_1 = \iint_{\sigma_1} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)\, d\sigma = - \iint_{\sigma_2} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)\, d\sigma.$$

Поток Π_2 вектора $\mathbf{a}$ через круг $x^2 + y^2 \leqslant 1$, $z = 0$ равен

$$\Pi_2 = \iint_{\sigma_2} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)\, d\sigma.$$

Так как на плоскости $z = 0$ имеем

$$\mathbf{a} = \frac{x^2 y}{1 + y^2}\mathbf{i} + 2x \operatorname{arctg} y\, \mathbf{j} - \mathbf{k}, \quad \mathbf{n}^0 = -\mathbf{k},$$

и следовательно $(\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) = 1$, то поток Π_2 через круг σ_2 будет равен площади круга σ_2:

$$\Pi_2 = \iint\limits_{\sigma_2} d\sigma = \pi.$$

Искомый поток $\Pi_1 = -\Pi_2 = -\pi$ ▷

Задачи для самостоятельного решения

Замыкая подходящим образом данные незамкнутые поверхности и пользуясь теоремой Гаусса—Остроградского, вычислить потоки векторных полей через указанные поверхности (нормаль к замкнутой поверхности берется внешняя).

128. $\mathbf{a} = (1 - 2x)\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $\quad S$: $x^2 + y^2 = z^2$ $(0 \leqslant z \leqslant 4)$.

129. $\mathbf{a} = z^2\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + y\mathbf{k}$; $\quad S$: $x^2 + y^2 = 4 - z$ $(z \geqslant 0)$.

130. $\mathbf{a} = (y^2 + z^2)\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + 2yz\mathbf{k}$; $\quad S$. $x^2 + z^2 = y^2$ $(0 \leqslant y \leqslant 1)$.

§ 13. Дивергенция векторного поля. Соленоидальное поле

Понятие потока вектора через замкнутую поверхность приводит к понятию о дивергенции или расходимости поля. Это понятие дает некоторую количественную характеристику поля в каждой его точке

Пусть M — изучаемая точка поля. Окружим ее поверхностью Σ произвольной формы, например, сферой достаточно малого радиуса. Область, ограниченная поверхностью Σ, пусть будет (V), а ее объем V. Рассмотрим отношение

$$\frac{\oint\!\!\oint\limits_{\Sigma} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)\, d\sigma}{V}. \tag{1}$$

Определение 1. Если отношение (1) имеет конечный предел, когда область (V) стягивается к точке M, то этот предел называют *дивергенцией* векторного поля (дивергенцией вектора $\mathbf{a}$) в точке M и обозначают символом $\operatorname{div} \mathbf{a}(M)$. Так что

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(M) = \lim_{(V) \to M} \frac{\oint\!\!\oint\limits_{\Sigma} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)\, d\sigma}{V}. \tag{2}$$

Формула (2) дает инвариантное определение дивергенции. Это определение означает, что дивергенция поля $\mathbf{a}$ в точке M есть объемная плотность потока вектора $\mathbf{a}$ в этой точке.

Точки M векторного поля $\mathbf{a}(M)$, в которых $\operatorname{div} \mathbf{a} > 0$, называются *источниками*, а точки, в которых $\operatorname{div} \mathbf{a} < 0$, называются *стоками* векторного поля.

Дивергенция векторного поля есть скалярная функция точек поля. Если координаты вектора

$$\mathbf{a}(M) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

имеют непрерывные частные производные $\dfrac{\partial P}{\partial x}, \dfrac{\partial Q}{\partial y}, \dfrac{\partial R}{\partial z}$ в окрестности точки $M(x, y, z)$, то, пользуясь *инвариантным определением* дивергенции, из теоремы Гаусса–Остроградского получаем, что

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \tag{3}$$

Все величины в формуле (3) рассматриваются в одной и той же точке $M(x, y, z)$.

Используя формулу (3) для дивергенции, можно теорему Гаусса–Остроградского (см. § 12) записать в векторной форме

$$\oiint\limits_{\Sigma} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)\, d\sigma = \iiint\limits_{V} \operatorname{div} \mathbf{a}\, dv. \tag{4}$$

Пример 1. Пользуясь инвариантным определением, вычислить дивергенцию вектора $\mathbf{a} = x\mathbf{i}$ в точке $O(0, 0, 0)$, выбрав в качестве поверхности σ, окружающую точку O, сферу σ_ε радиуса ε с центром в этой точке.

<u>*Решение.*</u> По определению дивергенции в данной точке имеем

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(0) = \lim_{(\sigma_\varepsilon)\to 0} \frac{\oiint\limits_{\sigma_\varepsilon} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)\, d\sigma}{v_\varepsilon},$$

где v_ε — объем шара, ограниченного сферой σ_ε, или

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(0) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\oiint\limits_{\sigma_\varepsilon} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)\, d\sigma}{v_\varepsilon}.$$

Но так как объем шара равен $v_\varepsilon = \frac{4}{3}\pi\varepsilon^3$, то

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(0) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\oiint\limits_{\sigma_\varepsilon} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)\, d\sigma}{(4/3)\pi\varepsilon^3}.$$

Вычислим поток $\oiint\limits_{\sigma_\varepsilon} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)\, d\sigma$ данного вектора через сферу σ_ε. Орт нормали $\mathbf{n}^0$ к сфере σ_ε направлен по радиусу сферы, поэтому можно положить

$$\mathbf{n}^0 = \mathbf{r}^0 = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \frac{\mathbf{r}}{\varepsilon},$$

где $\mathbf{r}^0$ — орт радиуса-вектора $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, или

$$\mathbf{n}^0 = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\varepsilon}.$$

Искомый поток будет равен

$$\oiint (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)\, d\sigma = \oiint\limits_{\sigma} \frac{x^2}{\varepsilon}\, d\sigma.$$

Переходя к координатам на сфере σ

$$x = \varepsilon\cos\varphi\sin\theta, \quad y = \varepsilon\sin\varphi\sin\theta, \quad z = \varepsilon\cos\theta,$$

получим

$$\oiint (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)\, d\sigma = \iint \frac{\varepsilon^2\cos^2\varphi\sin^2\theta \cdot \varepsilon^2\sin\theta\, d\varphi\, d\theta}{\varepsilon} =$$

$$= \varepsilon^3 \int\limits_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta = \frac{4}{3}\pi\varepsilon^3.$$

Следовательно,

$$\operatorname{div}\mathbf{a}(0) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{(4/3)\pi\varepsilon^3}{(4/3)\pi\varepsilon^3} = 1. \quad \triangleright$$

Пример 2. Вычислить $\operatorname{div}\mathbf{r}$.

◁ *Решение.* Имеем $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, так что $P = x$, $Q = y$, $R = z$ и, значит, по формуле (3)

$$\operatorname{div}\mathbf{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3. \quad \triangleright$$

Пример 3. Вычислить $\operatorname{div}(u\mathbf{a})$, где $u(M)$ — скалярная функция, $\mathbf{a}(M) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$ — вектор-функция.

◁ *Решение.* Используя формулу (3), находим

$$\operatorname{div}(u\mathbf{a}) = \frac{\partial(uP)}{\partial x} + \frac{\partial(uQ)}{\partial y} + \frac{\partial(uR)}{\partial z} = u\frac{\partial P}{\partial x} + P\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial Q}{\partial y} + Q\frac{\partial u}{\partial y} +$$

$$+ u\frac{\partial R}{\partial z} + R\frac{\partial u}{\partial z} = u\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) + \left(P\frac{\partial u}{\partial x} + Q\frac{\partial u}{\partial y} + R\frac{\partial u}{\partial z}\right) =$$

$$= u\operatorname{div}\mathbf{a} + (\mathbf{a}, \operatorname{grad} u).$$

Итак,

$$\operatorname{div}(u\mathbf{a}) = u\operatorname{div}\mathbf{a} + (\mathbf{a}, \operatorname{grad} u). \quad \triangleright \qquad (5)$$

Пример 4. Найти дивергенцию вектора

$$\mathbf{a} = \varphi(r)\mathbf{r}^0 = \frac{\varphi(r)}{r}\mathbf{r},$$

где $r = |\mathbf{r}|$ — расстояние от начала координат до переменной точки $M(x, y, z)$.

Решение. Используя формулу (5), получим

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \frac{\varphi(r)}{r}\operatorname{div}\mathbf{r} + \left(\mathbf{r}, \operatorname{grad}\frac{\varphi(r)}{r}\right).$$

Далее,

$$\operatorname{div}\mathbf{r} = 3, \quad \operatorname{grad}\frac{\varphi(r)}{r} = \left(\frac{\varphi(r)}{r}\right)'\operatorname{grad} r = \frac{r\varphi'(r) - \varphi(r)}{r^2}\mathbf{r}^0.$$

Поэтому

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = 3\frac{\varphi(r)}{r} + \left(\frac{r\varphi'(r) - \varphi(r)}{r^2}\mathbf{r}^0, \mathbf{r}\right) = 3\frac{\varphi(r)}{r} + \frac{r\varphi'(r) - \varphi(r)}{r} = 2\frac{\varphi(r)}{r} + \varphi'(r). \qquad \triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

131. При какой функции $\psi(r)$ будет $\operatorname{div}\psi(r)\mathbf{r} = 2\psi(r)$?

132. Найти $\operatorname{div}(r^4\mathbf{r})$.

133. Найти дивергенцию векторного поля $\mathbf{a} = [\mathbf{c}, \mathbf{r}]$, где $\mathbf{c}$ — постоянный вектор.

134. Найти $\operatorname{div}(\mathbf{r}[\mathbf{w}, \mathbf{r}])$, где $\mathbf{w}$ — постоянный вектор.

135. При какой функции $\psi(r)$ дивергенция поля $\mathbf{a} = xz\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \psi(r)\mathbf{k}$ будет равна z?

136. Найти поток радиуса вектора $\mathbf{r}$ через поверхность сферы.

137. Электростатическое поле точечного заряда q равно $\mathbf{E} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\mathbf{r}^0}{r^2}$. Вычислить $\operatorname{div}\mathbf{E}$.

138. Показать, что

$$\frac{1}{3}\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{n}^0)\,d\sigma = V,$$

где V — объем, ограниченный замкнутой поверхностью Σ.

139. Доказать, что если Σ — замкнутая кусочно гладкая поверхность и $\mathbf{c}$ — постоянный ненулевой вектор, то

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}\cos(\mathbf{n}, \mathbf{c})\,d\sigma = 0,$$

где $\mathbf{n}$ — вектор, нормальный к поверхности Σ.

140. Доказать формулу

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}(\varphi\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)\,d\sigma = \iiint_{V}(\varphi\operatorname{div}\mathbf{a} + (\mathbf{a}, \operatorname{grad}\varphi))\,dv,$$

где $\varphi = \varphi(x, y, z)$, а Σ — поверхность, ограничивающая объем V. Установить условия применимости формулы.

141. Доказать, что если функция $u(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

то

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}\frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma = 0,$$

где $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ — производная по направлению внешней нормали к кусочно гладкой замкнутой поверхности Σ.

142. Доказать, что если функция $u(x, y, z)$ является многочленом второй степени и Σ — кусочно гладкая замкнутая поверхность, то интеграл

$$\oiint\limits_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma$$

пропорционален объему, ограниченному поверхностью Σ.

Найти поток векторного поля через указанные замкнутые поверхности: 1) непосредственно; 2) по теореме Гаусса—Остроградского.

143. $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + z\mathbf{k}$, $\quad S: \begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ z = 4 \end{cases}$

144. $\mathbf{a} = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - z\mathbf{k}$; $\quad S: \begin{cases} z^2 = x^2 + y^2, \\ z = H \quad (H > 0) \end{cases}$

145. $\mathbf{a} = x\mathbf{i} - z\mathbf{j}$; $\quad S: \begin{cases} z = 6 - x^2 - y^2, \\ z^2 = x^2 + y^2 \quad (z \geqslant 0). \end{cases}$

146. $\mathbf{a} = yz\mathbf{i} - x\mathbf{j} - y\mathbf{k}$, $\quad S: \begin{cases} x^2 + z^2 = y^2, \\ y = 1 \quad (0 \leqslant y \leqslant 1) \end{cases}$

147. $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - z\mathbf{k}$; $\quad S: \begin{cases} z^2 = x^2 + y^2, \\ z = x^2 + y^2. \end{cases}$

148. $\mathbf{a} = 2x\mathbf{i} - (z - 1)\mathbf{k}$, $\quad S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z = 0, \quad z = 1 \end{cases}$

149. $\mathbf{a} = 2x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; $\quad S: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ 3z = x^2 + y^2 \quad \left(z \geqslant \dfrac{x^2 + y^2}{3}\right) \end{cases}$

150. $\mathbf{a} = yz\mathbf{i} + 3y\mathbf{j} - z\mathbf{k}$; $\quad S: x^2 + y^2 + z^2 = 4.$

151. $\mathbf{a} = (x + z)\mathbf{i} + (y + x)\mathbf{j} + (z + y)\mathbf{k}$, $\quad S: \begin{cases} x^2 + y^2 = R^2, \\ z = y \quad (z \geqslant 0) \end{cases}$

152. $\mathbf{a} = 3x\mathbf{i} - y\mathbf{j} - z\mathbf{k}$, $\quad S: \begin{cases} 9 - z = x^2 + y^2, \\ x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0 \\ \text{(первый октант).} \end{cases}$

153. $\mathbf{a} = (y - x)\mathbf{i} + (z - y)\mathbf{j} + (x - z)\mathbf{k}$, $\quad S: \begin{cases} x + y + z = 1, \\ x - y + z = 1, \\ x = 0, \quad z = 0. \end{cases}$

154. $\mathbf{a} = x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} - z\mathbf{k}$, $\quad S: \begin{cases} 1 - z = x^2 + y^2, \\ z = 0. \end{cases}$

Соленоидальное (трубчатое) поле

Определение. Если во всех точках M некоторой области G дивергенция векторного поля (заданного в области G) равна нулю

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(M) = 0,$$

то говорят, что поле *соленоидально* в этой области.

Таким образом, по определению, соленоидальное поле не имеет источников и стоков.

Из теоремы Гаусса–Остроградского следует, что в соленоидальном поле поток вектора $\mathbf{a} = \mathbf{a}(M)$ через любую замкнутую поверхность σ, лежащую в этом поле, равен нулю

$$\oiint_{\sigma} (\mathbf{a}, \mathbf{n})\, d\sigma = 0$$

В соленоидальном поле G векторные линии не могут ни начинаться, ни кончаться. Они могут быть либо замкнутыми кривыми, либо иметь концы на границе поля.

Уравнение

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(M) = 0$$

называется в гидродинамике *уравнением неразрывности несжимаемой жидкости*.

В этом случае количество жидкости, выходящей через какую-нибудь замкнутую поверхность σ, всегда равняется количеству входящей жидкости, и полный поток равен нулю.

Определение. Пусть имеем векторное поле $\mathbf{a}(M)$ (не обязательно соленоидальное). Рассмотрим в поле замкнутый ориентированный контур L. Поверхность Σ, имеющую линию L своим краем, назовем *поверхностью, натянутой на контур L*. Нормаль $\mathbf{n}$ к поверхности Σ условимся ориентировать так, чтобы с конца нормали выбранный обход контура L был виден совершающимся против часовой стрелки (рис. 29).

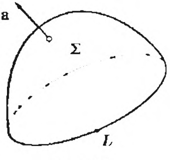

Рис. 29

Задачи для самостоятельного решения

Какие из следующих векторных полей являются соленоидальными?

155. $\mathbf{a} = x(\ \ y)\mathbf{i}\ \ yx\ \ z^2\mathbf{j}\ \ z(y\ \ x)\mathbf{k}$

156. $\mathbf{a} = y\mathbf{i}\ \ (x\ \ y)\mathbf{j}\ \ (3y\ \ )\mathbf{k}$

157. $\mathbf{a}\ \ (\ \ xy)\mathbf{i}\ \ \mathbf{j}\ \ (\ ^2y - 2xy\ \ 1)\mathbf{k}$

158. Показать, что векторное поле $\mathbf{F} = \frac{q}{r^3}\mathbf{r}$ $\left(r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)$ является соленоидальным во всякой области, не содержащей начала координат $O(0, 0, 0)$.
159. При каком условии векторное поле $\mathbf{a} = \varphi(r)\mathbf{r}$ будет соленоидальным?
160. Показать, что в соленоидальном поле поток векторного поля $\mathbf{a}(M)$ не зависит от вида поверхности Σ, натянутой на данный контур L, а зависит только от самого контура.

§ 14. Линейный интеграл от векторного поля. Циркуляция векторного поля

Пусть даны непрерывное векторное поле $\mathbf{a} = \mathbf{a}(M)$ и кусочно гладкая кривая L, на которой выбрано положительное направление (ориентированная кривая).

Определение 1. *Линейным интегралом* от векторного поля $\mathbf{a} = \mathbf{a}(M)$ вдоль ориентированной кривой L называется криволинейный интеграл первого рода (интеграл по длине дуги кривой) от скалярного произведения $(\mathbf{a}, \boldsymbol{\tau}^0)$:

$$\int\limits_L (\mathbf{a}, \boldsymbol{\tau}^0)\, ds,$$

где $\boldsymbol{\tau}^0 = \boldsymbol{\tau}^0(M)$ — орт вектора, касательного к линии L, ориентация которого совпадает с ориентацией L; ds — дифференциал длины дуги s кривой L.

Если $\mathbf{r} = \mathbf{r}(M)$ есть радиус-вектор произвольной точки M линии L, то линейный интеграл от поля $\mathbf{a}(M)$ можно записать в виде

$$\int\limits_L (\mathbf{a}, \boldsymbol{\tau}^0)\, ds = \int\limits_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r}). \tag{1}$$

Если в векторном поле введена прямоугольная система координат $Oxyz$, то $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$,

$$\mathbf{a} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k},$$

и линейный интеграл (1) выразится через криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int\limits_L P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz.$$

В случае, когда $\mathbf{a} = \mathbf{a}(M)$ является силовым полем, линейный интеграл (1) дает величину работы этого поля вдоль линии L.

1°. Свойства линейного интеграла. а) Линейность

$$\int_L (\lambda \mathbf{a}_1 + \mu \mathbf{a}_2, d\mathbf{r}) = \lambda \int_L (\mathbf{a}_1, d\mathbf{r}) + \mu \int_L (\mathbf{a}_2, d\mathbf{r}),$$

где λ, μ — постоянные числа.

б) Аддитивность:

$$\int_{L_1+L_2} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int_{L_1} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) + \int_{L_2} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}).$$

в) При изменении ориентации линии L интеграл меняет знак

$$\int_{BA} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = - \int_{AB} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}),$$

где A — начальная, а B — конечная точки линии L.

2°. Вычисление линейного интеграла от векторного поля. Пусть линия L задана параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1,$$

при этом в начальной точке A линии L параметр t принимает значение $t = t_0$, а в конечной точке B линии L — значение $t = t_1$ (направление на линии L соответствует возрастанию параметра t от t_0 до t_1); функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[t_0, t_1]$. Тогда

$$\int_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int_{AB} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int_{t_0}^{t_1} \{P[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)]\varphi'(t) +$$

$$+ Q[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)]\psi'(t) + R[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)]\chi'(t)\}\, dt.$$

Если линия L задана системой уравнений $y = \psi(x)$, $z = \chi(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, то

$$\int_{AB} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int_a^b \{P[x, \psi(x), \chi(x)] +$$

$$+ Q[x, \psi(x), \chi(x)]\psi'(x) + R[x, \psi(x), \chi(x)]\chi'(x)\}\, dx$$

Аналогичные формулы можно написать и для случаев, когда линия является одной из следующих систем уравнений:

$$x = \varphi(y), \quad z = \chi(y) \quad (y_0 \leqslant y \leqslant y_1)$$

или

$$x = \varphi(z), \quad y = \chi(z) \quad (z_0 \leqslant z \leqslant z_1)$$

Пример 1. Найти линейный интеграл от вектора $\mathbf{a} = \dfrac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$, где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, вдоль отрезка прямой от точки $A(\mathbf{r}_A)$ до $B(\mathbf{r}_B)$.

Решение. Искомым линейным интегралом будет

$$\int\limits_{AB} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int\limits_{AB} \frac{(\mathbf{r}, d\mathbf{r})}{|\mathbf{r}|}. \tag{1}$$

Из равенства

$$d(\mathbf{r}, \mathbf{r}) = (d\mathbf{r}, \mathbf{r}) + (\mathbf{r}, d\mathbf{r}) = 2(\mathbf{r}, d\mathbf{r})$$

находим

$$(\mathbf{r}, d\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\, d(\mathbf{r}, \mathbf{r}) = \frac{1}{2}\, d(|\mathbf{r}|^2) = \frac{1}{2} \cdot 2|\mathbf{r}|\, d|\mathbf{r}| = |\mathbf{r}|\, d|\mathbf{r}|.$$

Отсюда

$$\frac{(\mathbf{r}, d\mathbf{r})}{|\mathbf{r}|} = d|\mathbf{r}|. \tag{2}$$

Подставляя (2) в интеграл (1), будем иметь

$$\int\limits_{AB} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int\limits_{AB} d|\mathbf{r}| = \int\limits_{\mathbf{r}_A}^{\mathbf{r}_B} d|\mathbf{r}| = |\mathbf{r}_B| - |\mathbf{r}_A|. \qquad \triangleright$$

Следует обратить внимание на то, что

$$|d\mathbf{r}| \neq d|\mathbf{r}|.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти линейный интеграл вдоль отрезка прямой, ограниченного точками $A(\mathbf{r}_1)$ и $B(\mathbf{r}_2)$, для следующих векторных полей:

161. $\mathbf{a} = \mathbf{r}$. **162.** $\mathbf{a} = \dfrac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^2}$. **163.** $\mathbf{a} = \dfrac{\mathbf{r}^0}{|\mathbf{r}|^2}$, $\mathbf{r}^0$ — орт.

164. Вычислить линейный интеграл вдоль прямой, проходящей через точки $O(0,0,0)$ и $M_1(1,1,1)$ в направлении от точки O к точке M_1, если $\mathbf{a} = [\mathbf{b}, \mathbf{r}]$, где $\mathbf{b}$ — постоянный вектор.

165. Доказать, что

$$\int\limits_{AB} (\operatorname{grad} u, d\mathbf{r}) = u(B) - u(A).$$

Пример 2. Найти линейный интеграл от вектора $\mathbf{a} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ вдоль дуги L винтовой линии $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $z = \dfrac{t}{2\pi}$ от точки A пересечения линии с плоскостью $z = 0$ до точки B пересечения с плоскостью $z = 1$ (рис. 30).

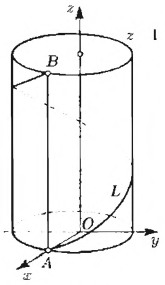

Рис. 30

Решение. Линейный интеграл в данном примере имеет вид

$$\int\limits_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int\limits_L z\,dx + x\,dy + y\,dz.$$

Винтовая линия расположена на круговом цилиндре $x^2 + y^2 = R^2$. В точке A имеем $t_0 = 0$, в точке B имеем $t = 2\pi$. Так как

$$dx = -R\sin t\,dt, \quad dy = R\cos t\,dt, \quad dz = \frac{dt}{2\pi},$$

то интеграл будет равен

$$\int\limits_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int\limits_0^{2\pi} \left(-\frac{t}{2\pi} R\sin t + R^2\cos^2 t + \frac{R}{2\pi}\sin t \right) dt =$$

$$= R^2 \int\limits_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt - \frac{R}{2\pi} \int\limits_0^{\pi} t\sin t\,dt = \pi R^2 + R,$$

так как

$$\int\limits_0^{\pi} \cos^2 t\,dt = \pi, \qquad \int\limits_0^{\pi} t\sin t\,dt = -2\pi. \qquad \triangleright$$

Пример 3. Найти линейный интеграл от вектора $\mathbf{a} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ (см. пример 2) вдоль прямой AB (см. рис. 30) в направлении от точки A до точки B.

Решение. Так как прямая AB (образующая цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$) расположена на плоскости xOz и проходит через точку $A(R, 0, 0)$, то $y = 0$, $x = R$, $dx = 0$ и для радиуса-вектора $\mathbf{r}$ точек прямой AB будем иметь $\mathbf{r} = R\mathbf{i} + z\mathbf{k}$, $d\mathbf{r} = \mathbf{k}\,dz$. Поэтому скалярное произведение

$$(\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = z\,dx + x\,dy + y\,dz$$

на прямой AB будет равно нулю. Следовательно, искомый линейный интеграл

$$\int\limits_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int\limits_{AB} (\mathbf{a}, d\mathbf{r})$$

на прямой AB будет равен нулю. $\triangleright$

Из примеров 2 и 3 следует, что в общем случае линейный интеграл от векторного поля зависит не только от начальной и конечной точек пути интегрирования, но и от формы этого пути.

Пример 4. Вычислить работу силового поля $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + (x + y + z)\mathbf{k}$ вдоль отрезка AB прямой, проходящей через точки $M_1(2, 3, 4)$ и $M_2(3, 4, 5)$.

Решение. Работа данного силового поля будет равна линейному интегралу вдоль отрезка M_1M_2:

$$A = \int\limits_{M_1M_2} (\mathbf{F}, d\mathbf{r}) = \int\limits_{M_1M_2} y\,dx + x\,dy + (x + y + z)\,dz.$$

Находим канонические уравнения прямой M_1M_2. Имеем

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{1}.$$

Отсюда

$$\begin{cases} y = x + 1, \\ z = x + 2, \end{cases}$$

$$dy = dx, \quad dz = dx.$$

Здесь x изменяется в пределах от 2 до 3 (так как абсцисса точки M_1 равна 2, а абсцисса точки M_2 равна 3). Искомая работа будет равна

$$A = \int\limits_2^3 (x + 1 + x + x + x + 1 + x + 2)\,dx = \int\limits_2^3 (5x + 4)\,dx = \frac{33}{2}. \qquad \triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

166. Вычислить линейный интеграл от плоского векторного поля $\mathbf{a} = \dfrac{y^2\mathbf{i} - x^2\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ вдоль полуокружности $x = R\cos t$, $y = R\sin t$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi)$.

167. Вычислить линейный интеграл от плоского векторного поля $\mathbf{a} = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + (x^2 - y)\mathbf{j}$ вдоль линии $y = |x|$ от точки $(-1, 1)$ до точки $(2, 2)$.

168. Вычислить линейный интеграл от плоского векторного поля $\mathbf{a} = (x^2 - 2xy)\mathbf{i} + (y^2 - 2xy)\mathbf{j}$:

а) вдоль параболы $y = x^2$ от точки $(-1, 1)$ до точки $(1, 1)$;

б) вдоль отрезка прямой, соединяющей точки $(-1, 1)$ и $(1, 1)$.

169. Вычислить работу силового поля $\mathbf{F} = 2xy\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$ вдоль дуги окружности $x^2 + y^2 = 1$ от точки $(1, 0)$ до точки $(0, 1)$ в направлении против часовой стрелки.

170. Вычислить работу силового поля $\mathbf{F} = (x^2 - 2xy)\mathbf{i} + (x^2 + y^2)\mathbf{j}$ вдоль параболы $y = x^2$ от точки $(0, 0)$ до точки $(1, 1)$.

171. Вычислить линейный интеграл от векторного поля

$$\mathbf{a} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - x - y + 2z}}$$

вдоль отрезка прямой от точки $(1, 1, 1)$ до точки $(4, 4, 4)$.

172. Вычислить линейный интеграл от векторного поля $\mathbf{a} = (y^2 - z^2)\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} - x^2\mathbf{k}$ вдоль линии $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ в направлении возрастания параметра t.

173. Вычислить линейный интеграл от векторного поля $\mathbf{a} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ вдоль витка винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ $(0 \leqslant t < 2\pi)$ в направлении возрастания параметра t.

174. Вычислить линейный интеграл от векторного поля $\mathbf{a} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ в направлении от точки (0, 0, 0) до точки (1, 1,) вдоль отрезка прямой, проходящей через эти точки.

3°. Циркуляция векторного поля и ее вычисление.

Определение 2. *Циркуляцией* Ц векторного поля $\mathbf{a} = \mathbf{a}(M)$ называется линейный интеграл, взятый вдоль замкнутой ориентированной кривой L. Таким образом, по определению

$$\text{Ц} = \oint_L (\mathbf{a},\, d\mathbf{r}),$$

где символ $\oint_L$ означает интеграл по замкнутой кривой L.

Если векторное поле $\mathbf{a} = \mathbf{a}(M)$ задано в координатной форме

$$\mathbf{a} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k},$$

то циркуляция векторного поля будет равна

$$\text{Ц} = \oint_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

Пример 5. Вычислить циркуляцию векторного поля $\mathbf{a} = -y^3\mathbf{i} + x^3\mathbf{j}$ вдоль эллипса L: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Решение. По определению циркуляции имеем

$$\text{Ц} = \oint_L (\mathbf{a},\, d\mathbf{r}) = \oint_L -y^3\,dx + x^3\,dy. \tag{3}$$

Параметрические уравнения данного эллипса имеют вид

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t \quad (0 \leqslant t < 2\pi). \end{cases} \tag{4}$$

Отсюда

$$dx = -a\sin t\,dt, \quad dy = b\cos t\,dt. \tag{5}$$

Подставляя (4) и (5) в (3), получим

$$\text{Ц} = ab\int_0^{2\pi} (b^2\sin^4 t + a^2\cos^4 t)\,dt = \frac{3}{4}\pi ab(a^2 + b^2),$$

так как

$$\int_0^{2\pi} \sin^4 t\,dt = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} (1-\cos 2t)^2\,dt = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left(1 - 2\cos 2t + \frac{1+\cos 4t}{2}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2} - 2\cos 2t + \frac{1}{2}\cos 4t\right)dt = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\frac{3}{2}\,dt = \frac{3}{4}\pi.$$

Аналогично находим, что

$$\int_0^{2\pi} \cos^4 t\,dt = \frac{3}{4}\pi. \qquad \triangleright$$

Пример 6. Вычислить циркуляцию векторного поля $\mathbf{a} = ye^{xy}\mathbf{i} + xe^{xy}\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$ вдоль линии L, получаемой пересечением конуса $x^2 + y^2 = (z-1)^2$ с координатными плоскостями (рис. 31).

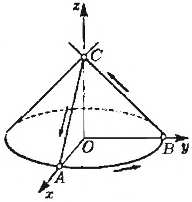

Рис. 31

Решение. Линия L состоит из двух отрезков BC и CA, расположенных на координатных плоскостях yOz и xOz соответственно и дуги $\breve{AB}$ окружности $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$. Поэтому циркуляция данного векторного поля будет равна

$$Ц = \oint_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int_{BC} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) + \int_{CA} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) + \int_{\breve{AB}} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}).$$

1) На отрезке BC имеем

$$x = 0,\ dx = 0;\quad z = 1 - y,\ dz = -dy;\quad 1 \geqslant y \geqslant 0.$$

Следовательно,

$$\int_{BC} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int_{BC} y\,dx = 0.$$

2) На отрезке CA имеем

$$y = 0,\ dy = 0,\quad z = 1 - x,\ dz = -dx;\quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Следовательно,

$$\int_{CA} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int_{CA} x\,dy = 0.$$

3) На дуге $\breve{AB}$ окружности $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ имеем $z = 0$, $dz = 0$, и значит

$$\int_{\breve{AB}} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int_{\breve{AB}} e^{xy}(y\,dx + x\,dy) = \int_{\breve{AB}} e^{xy}\,d(yx) = \int_{\breve{AB}} d(e^{xy}) = e^{xy}\Big|_{A(1,0)}^{B(0,1)} = 1 - 1 = 0.$$

Искомая циркуляция векторного поля равна нулю. $\triangleright$

Пример 7. Вычислить циркуляцию векторного поля $\mathbf{a} = xy\mathbf{i}+yz\mathbf{j}+xz\mathbf{k}$ если L: $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ x+y+z=1. \end{cases}$

<u>*Решение*</u> Имеем

$$Ц = \oint_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int_L xy\,dx + yz\,dy + xz\,dz.$$

Линия L есть эллипс, получающийся в результате сечения цилиндра $x^2+y^2=1$ плоскостью $x+y+z=1$. Найдем параметрические уравнения этой линии. Проекция любой точки этой линии на плоскости xOy находится на окружности $x^2+y^2=1$. Отсюда получаем $x=\cos t$, $y=\sin t$. Но эллипс лежит на плоскости $x+y+z=1$, отсюда $z=1-x-y$ и $z=1-\cos t-\sin t$. Следовательно, параметрические уравнения линии L:

$$\begin{cases} x=\cos t, \\ y=\sin t, \\ z=1-\cos t-\sin t \quad (0 \leqslant t < 2\pi). \end{cases}$$

Отсюда находим

$$dx = -\sin t\,dt, \quad dy=\cos t\,dt, \quad dz=(\sin t-\cos t)\,dt,$$

и, значит, циркуляция будет равна

$$Ц = \int_0^{2\pi}\big[-\cos t\sin^2 t+\sin t(1-\cos t-\sin t)\cos t$$

$$+\cos t(1-\cos t-\sin t)(\sin t-\cos t)\big]\,dt=$$

$$= \int_0^{2\pi}(-3\sin^2 t\cos t+\sin 2t-\cos^2 t\sin t-\cos^2 t-\cos^3 t)\,dt = -\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt=-\pi. \quad \triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить циркуляцию $Ц$ векторного поля $\mathbf{a}$ вдоль данной линии L:

175. $\mathbf{a} = (xz+y)\mathbf{i}+(yz-x)\mathbf{j}-(x^2+y^2)\mathbf{k}$; $\quad L$: $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ z=3. \end{cases}$

176. $\mathbf{a} = y^2\mathbf{i}+z^2\mathbf{j}+x^2\mathbf{k}$; $\quad L$: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2, \\ x^2+y^2=Rx \quad (z \geqslant 0). \end{cases}$

177. $\mathbf{a} = (2x+z)\mathbf{i}+(2y-z)\mathbf{j}+xyz\mathbf{k}$, L — линия пересечения параболоида вращения $x^2+y^2=1-z$ с координатными плоскостями.

176. Показать, что если циркуляция векторного поля по любому замкнутому контуру равна нулю, то в таком поле не может быть замкнутых векторных линий.

§ 15. Ротор (вихрь) векторного поля

Пусть имеем векторное поле

$$\mathbf{a}(M) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}.$$

Будем предполагать, что координаты P, Q, R вектора $\mathbf{a}(M)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого порядка по всем своим аргументам.

Определение 1. *Ротором* вектора $\mathbf{a}(M)$ называется вектор, обозначаемый символом $\operatorname{rot}\mathbf{a}(M)$ и определяемый равенством

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k} \qquad (1)$$

или в символической, удобной для запоминания, форме

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

Этот определитель обычно раскрывается по элементам первой строки, при этом операции умножения элементов второй строки на элементы третьей строки понимаются как операции дифференцирования, например, $\dfrac{\partial}{\partial x} \cdot Q = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Определение 2. Если в некоторой области G имеем $\operatorname{rot}\mathbf{a} = 0$, то векторное поле $\mathbf{a}$ в области G называется *безвихревым*.

Пример 1. Найти ротор вектора $\mathbf{a} = (x+z)\mathbf{i} + (y+z)\mathbf{j} + (x^2+z)\mathbf{k}$.

◁ <u>Решение</u>. Используя формулу (2), имеем

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x+z & y+z & x^2+z \end{vmatrix}.$$

Раскрывая определитель по элементам первой строки и понимая операцию умножения, скажем, $\dfrac{\partial}{\partial y}$ на x^2+z, как операцию частного дифференцирования, найдем

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = -\mathbf{i} - (2x-1)\mathbf{j}. \qquad ▷$$

Пример 2. Найти ротор вектора $\mathbf{H}$ напряженности магнитного поля в условиях примера 3 § 10.

Решение. Вектор $\mathbf{H}$ напряженности магнитного поля

$$\mathbf{H} = \frac{2}{\rho^2}[\mathbf{I}, \mathbf{r}], \quad \text{или} \quad \mathbf{H} = \frac{2}{\rho^2}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & I \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\frac{2I}{\rho^2}y\mathbf{i} + \frac{2I}{\rho^2}x\mathbf{j},$$

где $\rho^2 = x^2 + y^2$. Отсюда в силу (2)

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -\dfrac{2Iy}{x^2+y^2} & \dfrac{2Ix}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2Ix}{x^2+y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2Iy}{x^2+y^2}\right)\right]\mathbf{k} =$$

$$= 2I\left[\frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right]\mathbf{k} = 0 \quad (x^2+y^2 \neq 0).$$

Таким образом, $\operatorname{rot}\mathbf{H} = 0$ везде, кроме оси Oz, в точках которой последние формулы теряют смысл (знаменатель обращается в нуль), т. е. векторное поле $\mathbf{H}$ является безвихревым всюду вне точек оси Oz. ▷

Задачи для самостоятельного решения

Найти ротор следующих векторов:

179. $\mathbf{a} = (x^2+y^2)\mathbf{i} + (y^2+z^2)\mathbf{j} + (z^2+x^2)\mathbf{k}$.

180. $\mathbf{a} = z^3\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + x^3\mathbf{k}$.

181. $\mathbf{a} = \frac{1}{2}(-y^2\mathbf{i} + x^2\mathbf{j})$.

182. Показать, что если координаты вектора $\mathbf{a}(M)$ имеют непрерывные частные производные второго порядка, то $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{a} = 0$, т. е. что векторное поле $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ есть соленоидальное поле.

183. Показать, что

а) $\operatorname{rot}(\mathbf{a} \pm \mathbf{b}) = \operatorname{rot}\mathbf{a} \pm \operatorname{rot}\mathbf{a}$; б) $\operatorname{rot}\lambda\mathbf{a} = \lambda\operatorname{rot}\mathbf{a}$ (λ — числовая постоянная).

184. Показать, что если $u = u(m)$ — скалярная функция, $\mathbf{a} = \mathbf{a}(M)$ — вектор, то $\operatorname{rot}(u\mathbf{a}) = u\operatorname{rot}\mathbf{a} + [\operatorname{grad}u, \mathbf{a}]$.

185. Показать, что если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — постоянные векторы, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки $M(x, y, z)$, то $\operatorname{rot}(\mathbf{r}, \mathbf{a})\mathbf{b} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

186. Показать, что $\operatorname{rot}(r\mathbf{a}) = \frac{1}{r}[\mathbf{r}, \mathbf{a}]$, где $\mathbf{a}$ — постоянный вектор, $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

187. Показать, что $\operatorname{rot}(f(r)\mathbf{a}) = \frac{f'(r)}{r}[\mathbf{r}, \mathbf{a}]$, где $f(r)$ — произвольная дифференцируемая функция своего аргумента, $\mathbf{a}$ — постоянный вектор.

188. Показать, что векторное поле $\mathbf{a} = f(r)\mathbf{r}$ является безвихревым, т. е. $\operatorname{rot}\mathbf{a} \equiv 0$.

189. Показать, что $\operatorname{div}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = (\mathbf{b}, \operatorname{rot}\mathbf{a}) - (\mathbf{a}, \operatorname{rot}\mathbf{b})$.

190. Показать, что ротор поля линейных скоростей $\mathbf{v}$ вращающегося твердого тела есть постоянный вектор, направленный параллельно оси вращения, модуль которого равен удвоенной угловой скорости вращения: $\operatorname{rot}\mathbf{v} = 2\boldsymbol{\omega}$.

191. Определить угловую скорость ω, с которой вращается твердое тело около неподвижной оси, проходящей через некоторую его точку, если его линейная скорость $\mathbf{v} = 2x\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$.
192. Показать, что поле ротора вектора $\mathbf{a}(M)$ свободно от источников и стоков.
193. Какова должна быть функция $f(x, z)$, чтобы ротор векторного поля $\mathbf{a} = yz\mathbf{i} + f(x, z)\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ совпадал с вектором $-\mathbf{i} + \mathbf{k}$?

§ 16. Теорема Стокса

Пусть координаты вектора

$$\mathbf{a}(M) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

непрерывны и имеют непрерывные частные производные.

Теорема. *Циркуляция вектора* $\mathbf{a}$ *по замкнутому контуру* L *равна потоку ротора этого вектора через любую поверхность* Σ, *натянутую на контур* L:

$$\oint_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \iint_\Sigma (\operatorname{rot}\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)\, d\sigma. \qquad (1)$$

Предполагается, что ориентация нормали $\mathbf{n}^0$ к поверхности Σ согласована с ориентацией контура L так, чтобы из конца нормали обход контура в выбранном направлении был виден совершающимся против часовой стрелки.

Пример 1. Вычислить циркуляцию векторного поля $\mathbf{a} = y\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} - z\mathbf{k}$ по контуру L: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z = 3, \end{cases}$ 1) непосредственно, 2) по теореме Стокса.

<u>Решение.</u> 1) Контур L — окружность радиуса $R = 2$, лежащая в плоскости $z = 3$ (рис. 32). Выберем ориентацию на ней как указано на рисунке. Параметрические уравнения линии L:

$$\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t, \\ z = 3 \quad (0 \leqslant t < 2\pi), \end{cases}$$

так что

$$dx = -2\sin t\, dt, \quad dy = 2\cos t\, dt, \quad dz = 0.$$

Для циркуляции векторного поля $\mathbf{a}$ имеем

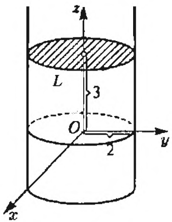

Рис. 32

$$Ц = \int_0^{2\pi} \left[2\sin t(-2\sin t) + 4\cos^2 t\, 2\cos t - 3\cdot 0\right] dt = -4\pi.$$

2) Для вычисления циркуляции по теореме Стокса выберем какую-нибудь поверхность Σ, натянутую на контур L. Естественно в качестве Σ взять круг, имеющий линию L своей границей. Согласно выбранной ориентации контура нормаль $\mathbf{n}^0$ к кругу необходимо взять равной $\mathbf{k}$: $\mathbf{n}^0 = \mathbf{k}$. Далее

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & x & z \end{vmatrix} = (2x \;\;)\mathbf{k}.$$

Поэтому в силу теоремы Стокса

$$Ц = \iint_{\Sigma} (\operatorname{rot}\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)\, d\sigma = \iint_{\Sigma} (2x \;\;)\, d\sigma =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2} (2\rho\cos\varphi - 1)\, \rho\, d\rho = -2\pi \frac{\rho^2}{2} \;\; -4\pi. \quad \triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

194. Показать, что поток ротора через незамкнутую поверхность, натянутую на данный контур, не зависит от формы поверхности.

Найти циркуляцию векторных полей по указанным контурам непосредственно и по теореме Стокса.

195. $\mathbf{a} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$; $\quad L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z = 0. \end{cases}$

196. $\mathbf{a} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; $\quad L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases} \quad (z \geqslant 0).$

197. $\mathbf{a} = 2xz\mathbf{i} - y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ по контуру, образованному пересечением плоскости $x + y + 2z = 2$ с координатными плоскостями.

198. $\mathbf{a} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$; $\quad L: \begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ z = 1. \end{cases}$

199. $\mathbf{a} = z^2\mathbf{i}$; $\quad L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 16, \\ x = 0, \; y = 0, \; z = 0. \end{cases}$

200. $\mathbf{a} = zy\,\mathbf{i} + xz^2\mathbf{j} + x^2y\mathbf{k}$; $\quad L: \begin{cases} x = y^2 + z^2, \\ x = 9. \end{cases}$

201. $\mathbf{a} = y\,\mathbf{i} - z\,\mathbf{j}$; $\quad L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ 3y + 4z = 5. \end{cases}$

202. $\mathbf{a} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; $\quad L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x = z. \end{cases}$

203. Дано векторное поле скоростей $\mathbf{v}$ точек твердого тела, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси Oz. Вычислить циркуляцию этого поля по окружно и

$$L\begin{cases} x & a\cos t \\ y & a\sin t \\ z & 0 \quad 0 \leqslant t < 2\pi) \end{cases}$$

непосред венно и ю теореме Стокса

Из теоремы Стокса получаем проекция вектора rot a на юбое направле ие n не зависит о выбора системы координа и равна поверх ностной п отности ирку яции векторного по я a по контуру ющадки, перпендику ярной этому н правлению

$$\text{пр}_{\mathbf{n}} \operatorname{rot} \mathbf{a}_{M} - (\operatorname{rot} \mathbf{a}\ \mathbf{n}^0)_{M} - \lim_{(\quad M} \frac{\oint\limits_{L} (\mathbf{a}\ d\mathbf{r})}{S} \tag{2}$$

Здесь (Σ) плоская п ощадка перпен нку ярная вектору n S площадка этой п он алки, L контур и ю цадки орие ированный так, чтобы обход контура бы ви ен из конца вектора n ротнв часовой стрел ки; запись (Σ) M означает, что площадк (Σ) стягивается к то ке M, в которой рассма ривается вектор rot a при ем на равле ие нормали n к этой пло адке остается все время одним и тем же.

Пример 2. Вычислить плотность ци куляции вектор ого поля a yi по окружности

$$L\begin{cases} x & a\cos t \\ y & a\sin t, \\ z - 0 & (0 < t < 2\pi) \end{cases}$$

в це тре этой окруж ости $M(0\ 0\ 0)$ в оложите ь ом направлении оси Oz

Решение Здесь (Σ) кру радиуса a с цен ром в то ке M так что $S = \pi a$

Искомая п отность циркуляци я μ равна

$$\mu_M \quad \lim_{a} \frac{1}{\pi a} \oint (\mathbf{a}\ d\mathbf{r}) \qquad \text{п} \frac{1}{a} \oint\limits_{L} y\,dx \quad \lim_{a} \frac{1}{\pi a^2} \int (\quad a\ ) \ \text{in}\ t\,dt$$

С другой стороны

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad k$$

и, значит,

$$(\text{ro}\ \mathbf{a}\ \mathbf{n})_{M} \qquad \mathbf{k}\ \mathbf{k}) = \quad ,$$

что в у (2) подт ерждает верност резу ьта ▷

Зак

Задачи для самостоятельного решения

204. Вычислить плотность циркуляции векторного поля $\mathbf{a} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ в точк $C(0,0,0)$ по контуру площадки, перпендикулярной направлению оси Ox, с помощью системы окружностей L: $\{y = a\cos t,\ z = a\sin t,\ x = 0,\ 0 \leqslant t < 2\pi\}$ где $a \to 0$

205. Вычислить плотность циркуляции векторного поля $\mathbf{a} = 2y\mathbf{i} + 5xz\mathbf{j}$ в точке $C(0,0,1)$ по контуру площадки, перпендикулярной направлению оси Oz с помощью системы эллипсов L: $\{x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ z = 1,\ 0 \leqslant t < 2\pi\}$, гд $a \to 0$.

§ 17. Независимость линейного интеграла от пути интегрирования. Формула Грина

Определение. Область G трехмерного пространства называется *односвязной* (точнее, *поверхностно односвязной*), если на любой замкнутый контур, лежащий в этой области, можно натянуть поверхность, целиком лежащую в области G. Например, все трехмерное пространство, внутренность сферы являются односвязными областями, внутренность тора, трехмерное пространство, из которого выброшена прямая, не являются односвязными областями.

Теорема. *Для того чтобы линейный интеграл*

$$\int_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int_L P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$$

не зависел от формы пути интегрирования L, необходимо и достаточно чтобы векторное поле

$$\mathbf{a} = P(x,y,z)\mathbf{i} + Q(x,y,z)\mathbf{j} + R(x,y,z)\mathbf{k}$$

было безвихревым, т. е.

$$\operatorname{rot} \mathbf{a}(M) = 0$$

Здесь предполагается, что координаты $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ вектора $\mathbf{a}$ имеют непрерывные частные производные первого порядка и область определения вектора $\mathbf{a}(M)$ односвязна.

В этом случае линейный интеграл $\int\limits_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r})$ будет зависеть только от положения начальной и концевой точек пути интегрирования L.

При выполнении условий теоремы *циркуляция векторного поля* $\mathbf{a}(M)$ *по любому замкнутому контуру C, расположенному в векторном поле* $\mathbf{a}(M)$ *равна нулю*: $\oint\limits_C (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = 0$.

Пример 1. Показать, что для векторного поля $\mathbf{a} = xy^2z\mathbf{i} + x^2yz\mathbf{j} + \frac{1}{2}x^2y^2\mathbf{k}$ линейный интеграл $\int\limits_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r})$ не зависит от формы пути интегрирования L.

Решение. Координаты вектора $\mathbf{a}$ являются всюду непрерывными функциями, так что область определения G вектора $\mathbf{a}$ есть все пространство — односвязная область. В этой области имеем

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy^2z & x^2yz & \frac{1}{2}x^2y^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, линейный интеграл

$$\int\limits_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int\limits_L xy^2\,dx + x^2yz\,dy + \frac{1}{2}x^2y^2\,dz$$

не зависит от формы пути интегрирования L. ▷

В частности, для плоского векторного поля

$$\mathbf{a}(M) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j} \tag{1}$$

имеем

$$\operatorname{rot}\mathbf{a}(M) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

Поэтому для плоского векторного поля (1), определенного в односвязной области G, условие $\operatorname{rot}\mathbf{a}(M) = 0$ в координатной форме записывается так: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Таким образом, *для того чтобы для плоского поля, определенного в односвязной области G, линейный интеграл*

$$\int\limits_L P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$$

не зависел от формы пути интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение

$$\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Замечание. Требование, чтобы область G, где определен вектор $\mathbf{a} = \mathbf{a}(M)$, была односвязной, существенно. Если область G неодносвязна, то при условии $\operatorname{rot}\mathbf{a}(M) = 0$ линейный интеграл может зависеть от формы пути интегрирования.

Пример 2. Рассмотрим линейный интеграл

$$\int\limits_L \frac{-y\,dx}{x^2+y^2} + \frac{x\,dy}{x^2+y^2}.$$

Решение. Подынтегральное выражение теряет смысл в точке $O(0,0)$, поэтому исключим эту точку. В оставшейся части плоскости (это будет уже неодносвязная область) коэффициенты при dx и dy непрерывны, имеют непрерывные частные производные, и выполняется тождество

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right).$$

С другой стороны, если вычислить этот интеграл вдоль окружности $L: x^2+y^2=R^2$, то, параметризируя уравнение этой окружности, будем иметь

$$\oint\limits_L \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t}{R^2}\,dt = \int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Мы получили, что циркуляция отлична от нуля и, следовательно, линейный интеграл зависит от пути интегрирования. ▷

Задачи для самостоятельного решения

Определить, для каких из указанных ниже векторных полей интеграл не зависит от формы пути интегрирования.

206. $\mathbf{a} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$. **207.** $\mathbf{a} = \dfrac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. **208.** $\mathbf{a} = \dfrac{y\mathbf{i} - x\mathbf{j}}{x^2+y^2} + \mathbf{k}$.

Формула Грина

Пусть в области D с границей L задано плоское векторное поле

$$\mathbf{a} = P(x,y)\mathbf{i} + Q(x,y)\mathbf{j},$$

где координаты $P(x,y)$, $Q(x,y)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

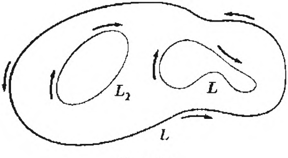

Рис. 33

Тогда справедлива формула Грина

$$\oint\limits_L P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy. \qquad (2$$

При этом граница L проходится так, чтобы область D оставалась слева

Область D может быть и неодносвязной, так что граница ее может состоять из нескольких компонент (см. рис. 33). В этом случае под интегралом

$$\int\limits_L P\,dx + Q\,dy$$

понимается сумма интегралов по всем компонентам границы области D.

Формула Грина (2) представляет собой частный случай теоремы Стокса (см. § 16).

Формула Грина дает возможность в некоторых случаях упростить вычисление циркуляции векторного поля.

Пример 3. Вычислить циркуляцию вектора $\mathbf{a} = \sqrt{1+x^2+y^2}\,\mathbf{i} + y\left[xy + \ln\left(x+\sqrt{1+x^2+y^2}\right)\right]\mathbf{j}$ по окружности $x^2+y^2 = R^2$.

Решение. Циркуляция данного вектора равна

$$Ц = \oint\limits_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \oint\limits_L \sqrt{1+x^2+y^2}\,dx + y\left[xy + \ln\left(x+\sqrt{1+x^2+y^2}\right)\right]dy.$$

Здесь

$$P = \sqrt{1+x^2+y^2}, \quad Q = xy^2 + y\ln\left(x+\sqrt{1+x^2+y^2}\right).$$

Находим частные производные

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = y^2 + \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}.$$

Применяя формулу Грина, получим

$$Ц = \iint\limits_D \left(y^2 + \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}} - \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\right)dx\,dy = \iint\limits_D y^2\,dx\,dy.$$

Переходя к полярным координатам

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi,$$

будем иметь

$$Ц = \iint\limits_D \rho^2\sin^2\varphi\,\rho\,d\rho\,d\varphi = \iint\limits_D \rho^3\sin^2\varphi\,d\rho\,d\varphi.$$

Так как $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $0 \leqslant \rho \leqslant R$, то

$$Ц = \int\limits_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi\int\limits_0^R \rho^3\,d\rho = \frac{\pi R^4}{4}. \qquad \triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить циркуляцию следующих векторных полей по данным контурам, применяя формулу Грина.

209. $\mathbf{a} = (y - x)\mathbf{i} + (y + x)\mathbf{j}$; $\quad L: x + y = 1,\ x = 0,\ y = 0$.

210. $\mathbf{a} = (x - y^2)\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j}$, $\quad L: y = x,\ y = x^2$.

211. $\mathbf{a} = x\ln(1 + y^2)\mathbf{i} + \dfrac{x^2 y}{1 + y^2}\mathbf{j}$, $\quad L: x^2 + y^2 = 2x$.

212. $- y^2\mathbf{i} - x^2\mathbf{j}$, $\quad L: x + y = -1,\ x = 0,\ y = 0$.

213. $\mathbf{a} = \dfrac{\left(3x - y^3\sqrt{1 + x^2 + 4y^3}\right)\mathbf{i} + \left(18y^2 + x^3\sqrt{1 + x^2 + 4y^3}\right)\mathbf{j}}{3\sqrt{1 + x^2 + 4y}}$, $\quad L: x^2 + y^2 = 1$.

214. С помощью формулы Грина вычислить разность между интегралами

$$I_1 = \int\limits_{AmB} (x + y)^2\,dx - (x - y)^2\,dy \quad \text{и} \quad I_2 = \int\limits_{AnB} (x + y)^2\,dx - (x - y)^2\,dy,$$

где AmB — отрезок прямой, соединяющей точки $A(0,0)$ и $B(1,1)$, а AnB — дуга параболы $y = x^2$.

215. Доказать, что величина интеграла $\oint\limits_L (2x + y)\,dx + 2x\,dy$, где L — замкнутый контур, дает площадь области, ограниченной этим контуром.

216. Пользуясь формулой Грина, вычислить линейный интеграл $\int\limits_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r})$ от векторного поля $\mathbf{a} = (e^x \sin y - y)\mathbf{i} + (e^x \cos y - 1)\mathbf{j}$, где линия L есть верхняя полуокружность $x^2 + y^2 = 2x$, проходимая в направлении от точки $A(2, 0)$ до точки $O(0, 0)$.

ГЛАВА

4 Потенциальное поле

§ 18. Признаки потенциальности поля

Определение. Векторное поле $\mathbf{a}(M) = P(x,y,z)\mathbf{i} + Q(x,y,z)\mathbf{j} + R(x,y,z)\mathbf{k}$, заданное в пространственной области V, называется *потенциальным*, если существует такая скалярная функция $\varphi(M)$, что во всех точках области V выполняется равенство

$$\mathbf{a}(M) = \operatorname{grad} \varphi(M). \tag{1}$$

Функция $\varphi(M) = \varphi(x,y,z)$, удовлетворяющая в области V равенству (1), называется *потенциалом* (или потенциальной функцией) векторного поля $\mathbf{a}$.

Соотношение (1) равносильно следующим трем скалярным равенствам

$$P(x,y,z) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad Q(x,y,z) = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad R(x,y,z) = \frac{\partial\varphi}{\partial z}. \tag{2}$$

Потенциал поля определяется неоднозначно, с точностью до постоянного слагаемого.

Замечание. Для силовых полей функция $\varphi(M)$ обычно называется *силовой функцией*, а потенциалом называется функция $-\varphi(M)$.

Пример 1 (Электростатическое поле точечного заряда). Показать, что поле электрической напряженности $\mathbf{E}$, создаваемое точечным зарядом q, помещенным в начале координат,

$$\mathbf{E} = \frac{q}{r^3}\mathbf{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

является потенциальным полем.

Решение. Задача ставится так: показать, что существует функция $\varphi(x,y,z)$ такая, что выполняются соотношения (2).

В нашем случае имеем

$$P(x,y,z) = \frac{qx}{r^3}, \quad Q(x,y,z) = \frac{qy}{r^3}, \quad R(x,y,z) = \frac{qz}{r^3}.$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{x}{r^3}$$

и аналогично

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{y}{r^3}, \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{z}{r^3},$$

то функция

$$\varphi(x, y, z) = -\frac{q}{r} = -\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

является потенциалом данного поля:

$$\operatorname{grad}\left(-\frac{q}{r}\right) = \mathbf{F}. \qquad \triangleright$$

В данном примере начало координат, где сосредоточен заряд q, является особой точкой поля $\mathbf{F}$.

Критерий потенциальности векторного поля

Теорема. *Для того, чтобы векторное поле* $\mathbf{a}(M)$, *заданное в односвязной области* V, *было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке области* V *выполнялось условие*

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = 0. \tag{3}$$

Иными словами, для того чтобы векторное поле, заданное в односвязной области, было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы оно было безвихревым.

Потенциал $\varphi(x, y, z)$ векторного поля

$$\mathbf{a} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

определяется формулой

$$\varphi(x, y, z) = \int\limits_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz, \tag{4}$$

где (x_0, y_0, z_0) — некоторая фиксированная точка поля, а (x, y, z) — произвольная текущая точка.

Пример 2. Показать, что векторное поле $\mathbf{a} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ является потенциальным.

<u>Решение</u>. Координаты $P = x^2$, $Q = y^2$, $R = z^2$ вектора $\mathbf{a}$ являются бесконечно дифференцируемыми функциями во всем пространстве, так что $\mathbf{a}$ есть бесконечно дифференцируемый вектор, определенный во всем трехмерном пространстве. Имеем

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial y}z^2 - \frac{\partial}{\partial z}y^2\right)\mathbf{i} +$$

$$+ \left(\frac{\partial}{\partial z}x^2 - \frac{\partial}{\partial x}z^2\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x}y^2 - \frac{\partial}{\partial y}x^2\right)\mathbf{k} = 0.$$

В силу теоремы векторное поле $\mathbf{a}$ потенциально. Легко видеть, что функция

$$\varphi(x, y, z) = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} + C,$$

где C — произвольная постоянная, является потенциалом данного поля. $\triangleright$

Задачи для самостоятельного решения

Проверить, будут ли следующие векторные поля потенциальными:

217. $\mathbf{a} = x^2\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$.

218. $\mathbf{a} = (2xy + z^2)\mathbf{i} + (2yz + x^2)\mathbf{j} + (2xz + y^2)\mathbf{k}$.

219. $\mathbf{a} = \frac{1}{3}(x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + xz\,\mathbf{k})$.

220. $\mathbf{a} = yz\cos xy\,\mathbf{i} + xz\cos xy\,\mathbf{j} + \sin xy\,\mathbf{k}$.

221. $\mathbf{a} = \ln(1 + z^2)\mathbf{i} + \ln(1 + x^2)\mathbf{j} + x\mathbf{k}$.

222. $\mathbf{a} = \left(\frac{z}{x^2} - \frac{1}{y}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{x}{y} + \frac{1}{z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{y}{z^2} - \frac{1}{x}\right)\mathbf{k}$.

223. $\mathbf{H} = \frac{2I}{r^2}(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$, $r^2 = x^2 + y^2$, $r \neq 0$.

224. Доказать, что поле $\mathbf{a} = f(r)\,\mathbf{r}$, где $f(r)$ — дифференцируемая функция, является потенциальным.

225. Показать, что в потенциальном поле $\mathbf{a} = \operatorname{grad}\varphi$ векторные линии перпендикулярны к поверхности уровня функции φ.

§ 19. Вычисление линейного интеграла от потенциального поля

Теорема. *Линейный интеграл от потенциального поля* $\mathbf{a}(M)$ *равен разности значений потенциала* $\varphi(M)$ *поля в конечной и начальной точках пути интегрирования:*

$$\int\limits_{M_1}^{M_2} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \varphi(M_2) - \varphi(M_1). \tag{1}$$

Пример 1. Вычислить линейный интеграл от векторного поля $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ вдоль отрезка прямой, ограниченного точками $M_1(-1, 0, 3)$ и $M_2(2, -1, 0)$.

Решение. Покажем, что данное векторное поле потенциально. В самом деле,

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Легко убедиться, что потенциал этого поля

$$\varphi(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} + C.$$

Применяя формулу (1), получим

$$\int\limits_{M_1}^{M_2} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \varphi(2, -1, 0) - \varphi(-1, 0, 3) = \frac{5}{2} - 5 = -\frac{5}{2}.$$

Отметим, что несущественно, какой линией соединены точки M_1 и M_2: в любом случае при фиксированных M и M_2 интеграл

$$\int\limits_{M}^{M_2} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int\limits_{M}^{M_2} x\,dx + y\,dy + z\,dz$$

имеет одно и то же значение. ▷

Вычисление потенциала поля в декартовых координатах

Формулой

$$\varphi(x, y, z) = \int\limits_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz \qquad (2)$$

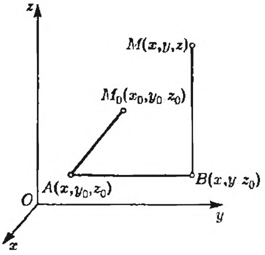

Рис. 34

можно пользоваться для нахождения потенциальной функции $\varphi(M) = \varphi(x, y, z)$ заданного потенциального поля

$$\mathbf{a}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

Для этого зафиксируем начальную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и соединим ее с текущей точкой $M(x, y, z)$ ломаной M_0ABM, звенья которой параллельны координатным осям, а именно, $M_0A \parallel Ox$, $AB \parallel Oy$, $BM \parallel Oz$ (рис. 34). Тогда формула (2) принимает вид

$$\varphi(x, y, z) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y_0, z_0)\,dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x, y, z_0)\,dy + \int\limits_{z_0}^{z} R(x, y, z)\,dz \qquad (3)$$

где x, y, z — координаты текущей точки на звеньях ломаной, вдоль которых ведется интегрирование.

Пример 2. Доказать, что векторное поле $\mathbf{a} = (y+z)\mathbf{i}+(x+z)\mathbf{j}+(x+y)\mathbf{k}$ является потенциальным, и найти его потенциал.

<u>*Решение.*</u> Первый способ. Необходимым и достаточным условием потенциальности поля $\mathbf{a}(M)$ является равенство нулю $\operatorname{rot}\mathbf{a}(M)$. В нашем случае

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y+z & x+z & x+y \end{vmatrix} = (1-1)\mathbf{i} + (1-1)\mathbf{j} + (1-1)\mathbf{k} \equiv 0$$

т. е. поле является потенциальным. Потенциал этого поля найдем с помощью формулы (3). За начальную фиксированную точку примем начало координат $O(0,0,0)$. Тогда получим

$$\varphi(x, y, z) = \int_0^x (0+0)\,dx + \int_0^y (x+0)\,dy + \int_0^z (x+y)\,dz = xy + xz + yz.$$

Итак,

$$\varphi(x, y, z) = xy + xz + yz + C,$$

где C — произвольная постоянная.

Второй способ. По определению потенциал $\varphi(x, y, z)$ есть такая скалярная функция, для которой $\operatorname{grad}\varphi = \mathbf{a}$. Это векторное равенство равносильно трем скалярным равенствам

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = y + z, \tag{4}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = x + z, \tag{5}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = x + y. \tag{6}$$

Интегрируя (4) по x, получим

$$\varphi(x, y, z) = \int_0^x (y+z)\,dx = xy + xz + f(y, z), \tag{7}$$

где $f(y, z)$ — произвольная дифференцируемая функция от y и z. Дифференцируя по y обе части (7) и учитывая (5), получим соотношение для нахождения пока неопределенной функции $f(y, z)$. Имеем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = x + \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \text{или} \quad x + z = x + \frac{\partial f}{\partial y},$$

откуда

$$z = \frac{\partial f}{\partial y}. \tag{8}$$

Проинтегрировав (8) по y, будем иметь

$$f(y, z) = \int_0^y z\,dy = zy + F(z), \tag{9}$$

где $F(z)$ — пока неопределенная функция от z. Подставив (9) в (7), получим

$$\varphi(x, y, z) = xy + xz + zy + F(z).$$

Продифференцировав последнее равенство по z и учитывая соотношение (6), получим уравнение для нахождения $F(z)$:

$$x + y = x + y + \frac{dF}{dz}.$$

Отсюда $\frac{dF}{dz} = 0$, так что $F(z) \equiv C$.

Итак,

$$\varphi(x, y, z) = xy + xz + zy + C.$$

Третий способ. По определению полного дифференциала функции $\varphi(x, y, z)$ имеем

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,dz.$$

Подставляя сюда вместо частных производных $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ их выражения из (4), (5), (6), получим

$$d\varphi = (y+z)\,dx + (x+z)\,dy + (x+y)\,dz,$$

или, после несложных преобразований,

$$d\varphi = (y\,dx + x\,dy) + (z\,dx + x\,dz) + (y\,dz + z\,dy) = \\ = d(xy) + d(xz) + d(yz) = d(xy + xz + yz).$$

Итак,

$$d\varphi = d(xy + xz + yz).$$

Отсюда следует, что

$$\varphi(x, y, z) = xy + xz + yz + C. \qquad \triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

В следующих задачах установить потенциальность данных векторных полей $\mathbf{a}(M)$ и найти их потенциалы $\varphi(M)$.

226. $\mathbf{a} = 2xyz\,\mathbf{i} + x^2z\,\mathbf{j} + x^2y\,\mathbf{k}$.

227. $\mathbf{a} = (yz+1)\,\mathbf{i} + xz\,\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}$.

228. $\mathbf{a} = (2xy+z)\,\mathbf{i} + (x^2-2y)\,\mathbf{j} + x\mathbf{k}$.

229. $\mathbf{a} = \dfrac{\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}}{x+y+z}$.

230. $\mathbf{a} = \dfrac{yz\,\mathbf{i} + xz\,\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}}{1+x^2y^2z^2}$.

231. $\mathbf{a} = \dfrac{\mathbf{r}}{r}$.

232. $\mathbf{a} = \dfrac{\mathbf{r}}{r}$.

233. $\mathbf{a} = r\,\mathbf{r}$.

В том случае, когда область Ω является звездной с центром в начале координат $O(0, 0, 0)$[1], потенциал $\varphi(M)$ векторного поля $\mathbf{a} = \mathbf{a}(M)$ в точке $M(x, y, z)$ можно находить по формуле

$$\varphi(M) = \int_0^1 \big(\mathbf{a}(M'), \mathbf{r}(M)\big)\,dt + C, \qquad C = \text{const}, \tag{10}$$

где $\mathbf{r}(M) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ — радиус-вектор точки $M(x, y, z)$, а точка $M'(tx, ty, tz)$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$ пробегает отрезок OM прямой, проходящей через точки O и M.

---

[1] Область Ω называется звездной относительно точки O, принадлежащей Ω, если любой луч, выходящий из этой точки, пересекает границу этой области не более чем в одной точке. Например, на плоскости звездными областями будут сама плоскость, параллелограмм, круг; в трехмерном пространстве — само пространство, параллелепипед, шар.

Пример 3. Найти потенциал векторного поля $\mathbf{a} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$.

◁ *Решение.* Легко видеть, что $\operatorname{rot}\mathbf{a} = 0$, т. е. данное векторное поле потенциально. Это поле определено во всем трехмерном пространстве, которое является звездным с центром в начале координат $O(0, 0, 0)$, поэтому для нахождения его потенциала воспользуемся формулой (10). Так как в данном случае

$$\mathbf{a}(M') = \mathbf{a}(tx, ty, tz) = t^2 yz\mathbf{i} + t^2 xz\mathbf{j} + t^2 xy\mathbf{k},$$

то скалярное произведение векторов $\mathbf{a}(M')$ и $\mathbf{a}(M')$ равно

$$\left(\mathbf{a}(M'), \mathbf{r}(M)\right) = t^2 (xyz + xyz + xyz) = 3t^2 xyz.$$

Искомый потенциал

$$\varphi(M) = \int\limits_0^1 \left(\mathbf{a}(M'), \mathbf{r}(M)\right) dt = xyz \int\limits_0^1 3t^2\, dt + C = xyz + C.$$

Итак

$$\varphi(M) = xyz + C. \qquad ▷$$

Задачи для самостоятельного решения

Используя формулу (10), найдите потенциалы следующих векторных полей.

234. $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k}$, где α, β, γ — постоянные.
235. $\mathbf{a} = (y + z)\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} + (y + x)\mathbf{k}$.
236. $\mathbf{a} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + e^z\mathbf{k}$.
237. $\mathbf{a} = e^x \sin y\,\mathbf{i} + e^x \cos y\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

ГЛАВА 5

Оператор Гамильтона. Дифференциальные операции второго порядка. Оператор Лапласа

§ 20. Оператор Гамильтона «набла»

Многие операции векторного анализа могут быть записаны в сокращенной и удобной для расчетов форме с помощью символического оператора Гамильтона «набла»

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{1}$$

В этом операторе соединены дифференциальные и векторные свойства. Будем понимать формальное умножение $\frac{\partial}{\partial x}$ на функцию $f(x, y, z)$ как частное дифференцирование $\frac{\partial f}{\partial x}$.

В рамках векторной алгебры формальные операции над оператором «набла» будем проводить так, как если бы он был вектором. Используя этот формализм, получим следующее.

1. Если $u = u(x, y, z)$ — скалярная дифференцируемая функция, то по правилу умножения вектора на скаляр имеем

$$\nabla u = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)u = \mathbf{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial u}{\partial z} = \operatorname{grad} u. \tag{2}$$

2. Если $\mathbf{a} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$, где P, Q, R — дифференцируемые функции, то по известной формуле для скалярного произведения имеем

$$(\nabla, \mathbf{a}) = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z},\ P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}\right) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \operatorname{div} \mathbf{a}, \tag{3}$$

в частности, $(\nabla, \mathbf{c}) = 0$ ($\mathbf{c}$ — постоянный вектор).

3. Если $\mathbf{a} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$, то

$$[\nabla, \mathbf{a}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \operatorname{rot} \mathbf{a}, \tag{4}$$

в частности, $[\nabla, \mathbf{c}] = 0$ ($\mathbf{c}$ — постоянный вектор).

Продолжая формализм действий с ∇ как с вектором, из распределительного свойства для скалярного и векторного произведений получаем

$$(\nabla, \mathbf{a} + \mathbf{b}) = (\nabla, \mathbf{a}) + (\nabla, \mathbf{b}), \tag{5}$$

т. е. $\operatorname{div}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \operatorname{div}\mathbf{a} + \operatorname{div}\mathbf{b}$,

$$[\nabla, \mathbf{a} + \mathbf{b}] = [\nabla, \mathbf{a}] + [\nabla, \mathbf{b}], \tag{6}$$

т. е. $\operatorname{rot}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \operatorname{rot}\mathbf{a} + \operatorname{rot}\mathbf{b}$.

Формулы (5) и (6) можно трактовать также как проявление дифференциальных свойств оператора «набла» (∇ — линейный дифференциальный оператор).

Используя формализм действий с оператором ∇ как с вектором, следует помнить, что ∇ *не является вектором* — он не имеет ни величины, ни направления, так что, например, вектор $[\nabla, \mathbf{a}]$ не будет, вообще говоря, перпендикулярен вектору $\mathbf{a}$ (однако для плоского поля $\mathbf{a} = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ вектор

$$[\nabla, \mathbf{a}] = \operatorname{rot}\mathbf{a} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

будет перпендикулярен плоскости xOy, а значит, и вектору $\mathbf{a}$). Точно так же по отношению к символическому вектору ∇ понятие *коллинеарности* не имеет смысла. Например, выражение $[\nabla\varphi, \nabla\psi]$, где φ и ψ — скалярные функции, формально напоминает векторное произведение двух коллинеарных векторов, которое всегда равно нулю. Но в общем случае это не имеет места. В самом деле, вектор $\nabla\varphi = \operatorname{grad}\varphi$ направлен по нормали к поверхности уровня $\varphi = \mathrm{const}$, а вектор $\nabla\psi = \operatorname{grad}\psi$ определяет нормаль к поверхности уровня $\psi = \mathrm{const}$, и эти нормали в общем случае не обязаны быть коллинеарными (рис. 35). С другой стороны, в любом дифференцируемом скалярном поле φ имеем $[\nabla\varphi, \nabla\varphi] = 0$. Эти примеры показывают, что с оператором ∇ нужно обращаться с осторожностью.

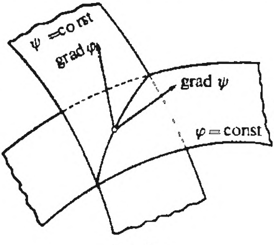

Рис. 35

Наряду с векторной природой оператор Гамильтона «набла» имеет *дифференциальную природу*. Учитывая дифференциальный характер ∇, *условимся считать*, что оператор ∇ действует на все величины, написанные за ним. В этом смысле, скажем, $(\nabla, \mathbf{a}) \neq (\mathbf{a}, \nabla)$. В самом деле,

$$(\nabla, \mathbf{a}) = \operatorname{div}\mathbf{a},$$

в то время как

$$(\mathbf{a}, \nabla) = P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y} + R\frac{\partial}{\partial z}$$

есть скалярный дифференциальный оператор.

Применяя оператор ∇ к произведению каких-либо величин, надо иметь в виду правило дифференцирования произведения

$$\frac{\partial}{\partial x}(uv) = u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Отсюда следует, что оператор «набла» надо применить поочередно к каждому множителю, оставляя остальные множители неизменными, и затем брать сумму полученных выражений. При этом будем руководствоваться следующими правилами.

1. Если оператор ∇ действует на какое-либо произведение, то в *первую очередь* учитывается его дифференциальный характер, а затем уже векторные свойства.
2. Чтобы отметить тот факт, что «набла» не воздействует на какую-либо величину, входящую в состав сложной формулы, эту величину отмечают субиндексом c (const), который в окончательном результате может быть снят.
3. Все величины, на которые оператор «набла» не воздействует, в окончательном результате ставятся впереди «набла», т. е. слева от него.

Пример 1. Показать, что $\operatorname{div}(u\mathbf{a}) = u\operatorname{div}\mathbf{a} + (\mathbf{a}, \operatorname{grad} u)$. Здесь u — скалярная функция, $\mathbf{a}$ — вектор-функция.

<u>*Решение.*</u> В символической записи

$$\operatorname{div}(u\mathbf{a}) = (\nabla, u\mathbf{a}).$$

Учитывая сначала дифференциальный характер ∇, мы должны написать

$$(\nabla, u\mathbf{a}) = (\nabla, u_c\mathbf{a}) + (\nabla, u\mathbf{a}_c).$$

Рассматривая выражение $(\nabla, u_c\mathbf{a})$, мы можем постоянный множитель u_c вынести за знак «набла» и, как скаляр, за знак скалярного произведения, что дает

$$(\nabla, u_c\mathbf{a}) = (u_c\nabla, \mathbf{a}) = u_c(\nabla, \mathbf{a}) = u_c(\nabla, \mathbf{a})$$

(на последнем шаге мы опустили индекс c).

В выражении $(\nabla, u\mathbf{a}_c)$ оператор ∇ действует только на скалярную функцию u, поэтому мы можем написать, что

$$(\nabla, u\mathbf{a}_c) = (\nabla u, \mathbf{a}_c) = (\mathbf{a}_c, \nabla u) = (\mathbf{a}, \nabla u).$$

В результате получаем формулу

$$(\nabla, u\mathbf{a}) = u(\nabla, \mathbf{a}) + (\mathbf{a}, \nabla u),$$

или

$$\operatorname{div}(u\mathbf{a}) = u\operatorname{div}\mathbf{a} + (\mathbf{a}, \operatorname{grad} u). \qquad \triangleright$$

Пример 2. Показать, что $\operatorname{rot}(u\mathbf{a}) = u \operatorname{rot} \mathbf{a} - [\mathbf{a}, \operatorname{grad} u]$.

<u>*Решение.*</u> В символической записи

$$\operatorname{rot}(u\mathbf{a}) = [\nabla, u\mathbf{a}].$$

Учитывая дифференциальные свойства ∇, сначала пишем

$$[\nabla, u\mathbf{a}] = [\nabla, u_c \mathbf{a}] + [\nabla, u\mathbf{a}_c]. \tag{7}$$

Затем в первом слагаемом справа выносим скалярный множитель u_c за знак ∇ и за знак векторного произведения, что дает

$$[\nabla, u_c \mathbf{a}] = u_c [\nabla, \mathbf{a}] = u[\nabla, \mathbf{a}].$$

Во втором слагаемом в (7) относим u к оператору ∇ и изменяем порядок множителей для того, чтобы вектор $\mathbf{a}_c$, на который «набла» не действует, оказался впереди ∇. Это даст

$$[\nabla, u\mathbf{a}_c] = [\nabla u, \mathbf{a}_c] = -[\mathbf{a}, \nabla u].$$

Таким образом,

$$[\nabla, u\mathbf{a}] = u[\nabla, \mathbf{a}] - [\mathbf{a}, \nabla u],$$

или

$$\operatorname{rot}(u\mathbf{a}) = u \operatorname{rot} \mathbf{a} - [\mathbf{a}, \operatorname{grad} u]. \qquad \triangleright$$

Пример 3. Пользуясь символическим методом, найти $\operatorname{div}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

<u>*Решение.*</u> Имеем

$$\operatorname{div}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = (\nabla, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = (\nabla, [\mathbf{a}, \mathbf{b}_c]) + (\nabla, [\mathbf{a}_c, \mathbf{b}]). \tag{8}$$

Пользуясь свойством циклической перестановки множителей в смешанном произведении, преобразуем выражения в правой части (8) так, чтобы все постоянные величины оказались перед оператором ∇, а переменные — позади него. Получим

$$\operatorname{div}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = ([\nabla, \mathbf{a}], \mathbf{b}_c) - (\nabla, [\mathbf{b}, \mathbf{a}_c]) =$$
$$= ([\nabla, \mathbf{a}], \mathbf{b}_c) - ([\nabla, \mathbf{b}], \mathbf{a}_c) = (\mathbf{b}, [\nabla, \mathbf{a}]) - (\mathbf{a}, [\nabla, \mathbf{b}]),$$

т. е. $\operatorname{div}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = (\mathbf{b}, \operatorname{rot} \mathbf{a}) - (\mathbf{a}, \operatorname{rot} \mathbf{b})$. $\triangleright$

Замечание. Применяя символический метод, мы избегаем весьма сложных аналитических преобразований и быстро получаем окончательный результат. Но, с другой стороны, различные формальные преобразования с оператором «набла» надо производить очень внимательно, в противном случае возможны, как мы видели, грубые ошибки. Поэтому при отсутствии уверенности в полученном результате его следует проверить аналитическим методом.

Задачи для самостоятельного решения

238. Показать, что

а) $\nabla\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\nabla u - u\nabla v}{v^2}$; б) $\nabla f(u) = f'(u)\nabla u$.

239. Доказать, что вектор $[\nabla u, \nabla v]$ соленоидален, если u и v — дифференцируемые скалярные функции.

Используя оператор Гамильтона ∇, доказать следующие равенства

240. а) $\operatorname{grad}(uv) = v \operatorname{grad} u + u \operatorname{grad} v$. б) $\operatorname{rot}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = (\mathbf{b}, \nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a}, \nabla)\mathbf{b} + \mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{b} - \mathbf{b} \operatorname{div} \mathbf{a}$.

241. $\operatorname{rot}[\mathbf{a}, \mathbf{r}] = 2\mathbf{a}$, $\mathbf{a}$ — постоянный вектор.

242. Доказать, что вектор $\mathbf{a} = u \operatorname{grad} v$ ортогонален к $\operatorname{rot} \mathbf{a}$.

§ 21. Дифференциальные операции второго порядка. Оператор Лапласа

Дифференциальные операции второго порядка получаются в результате двукратного применения к полям оператора ∇.

Пусть имеем скалярное поле $u = u(M)$. Действуя на это поле, оператор ∇ порождает векторное поле $\nabla u = \operatorname{grad} u$.

Для векторного поля ∇u оператор ∇, примененный повторно к ∇u, дает скалярное поле

$$(\nabla, \nabla u) = \operatorname{div} \operatorname{grad} u \tag{1}$$

и векторное поле

$$[\nabla, \nabla u] = \operatorname{rot} \operatorname{grad} u. \tag{2}$$

Если задано векторное поле $\mathbf{a} = \mathbf{a}(M)$, то оператор ∇ порождает скалярное поле $(\nabla, \mathbf{a}) = \operatorname{div} \mathbf{a}$. Действуя на скалярное поле $\operatorname{div} \mathbf{a}$, оператор ∇ порождает векторное поле

$$\nabla(\nabla, \mathbf{a}) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{a}. \tag{3}$$

Действуя на векторное поле $\mathbf{a} = \mathbf{a}(M)$, оператор ∇ порождает также векторное поле $[\nabla, \mathbf{a}] = \operatorname{rot} \mathbf{a}$. Применяя к этому полю снова оператор ∇, получим скалярное поле

$$(\nabla, [\nabla, \mathbf{a}]) = \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{a} \tag{4}$$

и векторное поле

$$[\nabla, [\nabla, \mathbf{a}]] = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{a}. \tag{5}$$

Формулы (1)–(5) определяют так называемые *дифференциальные операции второго порядка*.

Пример 1. Пусть функция $u = u(x, y, z)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Доказать, что $\operatorname{rot} \operatorname{grad} u \equiv 0$.

Решение. П е р в ы й с п о с о б. Действуя формально, получим

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = [\nabla, \nabla u] = [\nabla, \nabla] u = 0,$$

так как $[\nabla, \nabla] = 0$ как векторное произведение двух одинаковых «векторов».

Второй способ. Используя выражения градиента и ротора в декартовых координатах и учитывая данные условия, будем иметь

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\mathbf{i} +$$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]\mathbf{j} + \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]\mathbf{k} =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\right)\mathbf{k} = 0,$$

так как смешанные производные в этом случае равны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z\, \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z\, \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial z}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x}.$$

Аналогично доказывается, что для векторного поля

$$\mathbf{a} = P(x, y, z)\mathbf{i} - Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k},$$

координаты P, Q, R которого имеют непрерывные частные производные второго порядка, получим $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{a} = 0$. ▷

Обратим особое внимание на дифференциальную операцию второго порядка $\operatorname{div}\operatorname{grad} u = (\nabla, \nabla u)$. Предполагая, что функция $u(x, y, z)$ имеет вторые частные производные по x, y и z, получим

$$(\nabla, \nabla u) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k},\ \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 z} \equiv \Delta u.$$

Итак, $(\nabla, \nabla u) = \Delta u$, где символ $\Delta u \equiv \dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 z}$ называется *оператором Лапласа*. Его можно представить как скалярное оператора Гамильтона ∇ на самого себя, т. е.

$$\Delta = (\nabla, \nabla) = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Этот оператор играет важную роль в математической физике.

Рассмотрим еще одну операцию второго порядка $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a}$. Имеем $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a} = [\nabla, [\nabla, \mathbf{a}]]$. Воспользуемся формулой для двойного векторного произведения, записанной в виде $[A, [B, C]] = B(A, C) - (A, B)C$. Заменяя в этой формуле A на ∇, B на ∇, C на $\mathbf{a}$, получим

$$[\nabla, [\nabla, \mathbf{a}]] = \nabla(\nabla, \mathbf{a}) - (\nabla, \nabla)\mathbf{a} = \nabla(\nabla, \mathbf{a}) - \Delta\mathbf{a}, \tag{6}$$

т е

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{a}) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{a} - \Delta \mathbf{a}, \quad \text{где} \quad \Delta \mathbf{a} = \Delta P \mathbf{i} + \Delta Q \mathbf{j} + \Delta R \mathbf{k}$$

Дифференциальные операции второго порядка можно для наглядности записать в виде следующей таблицы

	Скалярное поле u	Векторное поле $\mathbf{a}$	
	grad	div	rot
grad		$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{a}$	
div	$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \nabla u$		$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{a} = 0$
rot	$\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = 0$		$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{a} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{a} - \Delta \mathbf{a}$

Пример 2. Законы классической теории электромагнетизма постулируются в виде системы уравнений Максвелла

В простейшем случае непроводящей однородной и изотропной среды при отсутствии зарядов и токов эта система имеет вид

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = [\nabla, \mathbf{H}], \tag{7}$$

$$-\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = [\nabla, \mathbf{E}] \tag{8}$$

$$(\nabla, \mathbf{E}) = 0 \tag{9}$$

$$(\nabla, \mathbf{H}) = 0 \tag{10}$$

Здесь $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — векторы напряженности электрического и магнитного полей, ε и μ — коэффициенты электрической и магнитной проницаемости (в наших предположениях ε, $\mu = \text{const}$), c — скорость света в пустоте

Поскольку пространственная и временная производные коммутируют, т е

$$\frac{\partial}{\partial t}[\nabla, \mathbf{H}] = \left[\nabla, \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\right],$$

то дифференцируя (7) по t, получим

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \left[\nabla, \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\right]$$

Заменяя $\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$ из (8), найдем $\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\frac{c}{\mu}[\nabla, [\nabla, \mathbf{E}]]$ или

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -[\nabla, [\nabla, \mathbf{E}]] \tag{11}$$

В силу формулы (6) $[\nabla, [\nabla, \mathbf{E}]] = \nabla(\nabla, \mathbf{E}) - \Delta\mathbf{E}$. Так как $(\nabla, \mathbf{E}) = 0$, то из (11) имеем $-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\Delta\mathbf{E}$.

Итак, для векторного поля $\mathbf{E}$ получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{c^2}{\varepsilon\mu}\Delta\mathbf{E}.$$

Это — одно из основных уравнений математической физики, называемое *волновым уравнением*.

Нетрудно убедиться (проверьте это!), что векторное поле $\mathbf{H}$ удовлетворяет точно такому же волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = \frac{c^2}{\varepsilon\mu}\Delta\mathbf{H}.$$

Таким образом, каждая из координат E_x, E_y, E_z и H_x, H_y, H_z векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ удовлетворяет в наших условиях уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right).$$

Здесь $a = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ — скорость распространения процесса. В вакууме при $\varepsilon = \mu = 1$ имеем $a = c$, т. е. в пустоте электромагнитные процессы распространяются со скоростью света.

Задача для самостоятельного решения

243. Показать, что любое решение уравнения $[\nabla, [\nabla, \mathbf{A}]] - k^2\mathbf{A} = 0$, удовлетворяющее условию соленоидальности, удовлетворяет векторному уравнению Гельмгольца $\nabla^2\mathbf{A} + k^2\mathbf{A} = 0$.

Определение. Скалярное поле $u = u(x, y, z)$, удовлетворяющее условию $\Delta u = 0$, называется *лапласовым* или *гармоническим полем*.

Пример 3. Важным примером гармонического поля является скалярное поле $u = \frac{k}{r}$, $k = \text{const}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Эта функция представляет собой потенциал поля тяготения, создаваемого точечной массой, помещенной в начале координат. Нетрудно проверить, что функция $u = \frac{k}{r}$ — гармоническая всюду, кроме начала координат, где она не определена. В самом деле,

$$\left(\nabla, \nabla\frac{k}{r}\right) = k\left(\nabla, \nabla\frac{1}{r}\right) = k\left(\nabla, -\frac{1}{r^2}\nabla r\right) = -k\left(\nabla, \frac{1}{r^2}\mathbf{r}^0\right) =$$

$$= -k\left(\nabla\frac{1}{r^2}, \mathbf{r}^0\right) - k\frac{1}{r^2}(\nabla, \mathbf{r}^0) = -k\left(-\frac{2}{r^3}\nabla r, \mathbf{r}^0\right) - \frac{k}{r^2}(\nabla, \mathbf{r}^0) =$$

$$= \frac{2k}{r^3}(\mathbf{r}^0, \mathbf{r}^0) - \frac{k}{r^2}(\nabla, \mathbf{r}^0) = \frac{2k}{r^3} - \frac{k}{r^2}\cdot\frac{2}{r} = 0$$

для всех $r \neq 0$, так как

$$(\nabla, \mathbf{r}^0) = \left(\nabla, \frac{\mathbf{r}}{r}\right) = \left(\nabla\frac{1}{r}, \mathbf{r}\right) + \frac{1}{r}(\nabla, \mathbf{r}) = \left(-\frac{\nabla r}{r^2}, \mathbf{r}\right) + \frac{3}{r} =$$

$$= -\frac{1}{r^2}(\mathbf{r}^0, \mathbf{r}) + \frac{3}{r} = -\frac{1}{r}(\mathbf{r}^0, \mathbf{r}^0) + \frac{3}{r} = -\frac{1}{r} + \frac{3}{r} = \frac{2}{r}.$$

Пример 4. Доказать, что для потенциального векторного поля $\mathbf{a}$ его потенциальная функция $u(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \rho(x, y, z), \tag{12}$$

где $\rho(x, y, z)$ — дивергенция вектора $\mathbf{a}$.

Решение. По условию

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \rho. \tag{13}$$

Так как векторное поле $\mathbf{a}$ потенциальное, то $\mathbf{a} = \operatorname{grad} u$, где u — потенциал поля. Подставляя в (13) $\mathbf{a} = \operatorname{grad} u$, получим $\operatorname{div}\operatorname{grad} u = \rho$ или, так как $\operatorname{div}\operatorname{grad} u = \Delta u$, то $\Delta u = \rho$.

В частном случае, в точках поля, где дивергенция равна нулю, уравнение (12) обращается в уравнение Лапласа $\Delta u = 0$. Уравнение Лапласа–Пуассона дает возможность найти потенциальную функцию u с помощью интегрирования дифференциального уравнения в частных производных. В некоторых задачах это оказывается более удобным.

В электростатике нередко предпочитают вместо функции u брать противоположную ей по знаку функцию $v = -u$. Тогда $\mathbf{a} = -\operatorname{grad} v$. Сообразно с этим в теории электростатического поля уравнение Пуассона имеет вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}. \quad \triangleright \tag{14}$$

Рассмотрим элементарный пример на применение уравнения Пуассона.

Пример 5. Пусть две бесконечные разноименно заряженные параллельные пластины AA_1 и BB_1 имеют потенциалы v_1 и v_2, причем, для определенности, $v_1 > v_2$. Найти поле $\mathbf{E}$ между ними (рис. 36).

Решение. Направим ось Ox перпендикулярно к пластинам в направлении убывания потенциала, а плоскость yOz совместим с положительно заряженной пластиной AA_1. Будем искать потенциальную функцию из уравнения Пуассона

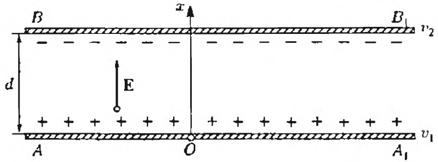

Рис. 36

В силу симметрии задачи относительно оси Ox и бесконечности пластин можно заключить, что эквипотенциальными поверхностями будут плоскости, параллельные пластинам, а функция v будет зависеть лишь от одной переменной x. Уравнение (14) примет вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \tag{15}$$

поскольку объемные заряды во всем пространстве между пластинами отсутствуют. Интегрируя (15), найдем

$$v = C_1 x + C_2 \tag{16}$$

(C_1, C_2 — произвольные постоянные).

Потребуем, чтобы при $x = 0$ функция v принимала значение v_1, а при $x = d$, где d — расстояние между пластинами, она принимала значение v_2. Это дает $C_2 = v_1$, $v_2 = C_1 d + C_2$, откуда $C_2 = v_1$, $C_1 = \dfrac{(v_2 - v_1)}{d}$. Подставляя эти значения C_1, C_2 в (16), получим

$$v = \frac{v_2 - v_1}{d} x + v_1 = v_1 - \frac{v_1 - v_2}{d} x.$$

Вектор $\mathbf{E}$ определится по формуле $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} v$, что дает

$$\mathbf{E} = \frac{v_1 - v_2}{d} \mathbf{i},$$

так что поле будет однородным и направлено по оси Ox. Величина $\mathbf{E}$ в любой точке равна $|\mathbf{E}| = \dfrac{(v_1 - v_2)}{d}$, т. е. равна падению потенциала на единицу длины кратчайшего пути между пластинами. ▷

Задачи для самостоятельного решения

244. Пусть скалярная функция $\varphi(M)$ удовлетворяет уравнению Лапласа. Показать, что вектор $\nabla\varphi$ — соленоидальный и безвихревой.

245. Показать, что $\Delta(uv) = u\Delta v + v\Delta u + 2(\nabla u, \nabla v)$.

246. Доказать, что если $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, то

$$\Delta \mathbf{r} = \begin{cases} \dfrac{2}{r} & \text{в пространстве}, \\[2ex] \dfrac{1}{r} & \text{на плоскости}. \end{cases}$$

247. Проверить, являются ли следующие скалярные поля гармоническими:
а) $u = x \quad 2xy - y$; б) $u = x\,y \quad y\,z \quad z$; в) $u = x \quad y$.

248. Показать, что скалярное поле $u = \ln\frac{1}{r}$, где $r = \quad y$ $(r \neq 0)$ является гармоническим.

249. Найти все гармонические поля, зависящие только от x.

250. Найти общий вид однородного гармонического многочлена второй степени от x и y.

251. Найти все решения уравнения Пуассона $\Delta u = x$, зависящие только от x.

Пример 6 (формулы Грина). Пусть φ, ψ — две скалярные функции точки. Составим вектор $\mathbf{a} = \varphi \operatorname{grad} \psi$.

Тогда

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \operatorname{div} (\varphi \operatorname{grad} \psi) = \varphi \operatorname{div} \operatorname{grad} \psi + (\operatorname{grad} \varphi, \operatorname{grad} \psi) =$$
$$= \varphi\, \Delta\psi + (\operatorname{grad} \varphi, \operatorname{grad} \psi).$$

Применим теперь формулу Гаусса–Остроградского

$$\oiint_{\Sigma} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)\, d\sigma = \iiint_{V} \operatorname{div} \mathbf{a}\, dv.$$

Заметим, что в нашем случае

$$(\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) = (\varphi \operatorname{grad} \psi, \mathbf{n}^0) = \varphi(\operatorname{grad} \psi, \mathbf{n}^0) = \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n}.$$

В результате получаем *первую формулу Грина*

$$\iiint_{V} [\varphi\Delta\psi + (\operatorname{grad} \varphi, \operatorname{grad} \psi)]\, dv = \oiint \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n}\, d\sigma, \tag{17}$$

которая при $\varphi = \psi$ превращается в формулу

$$\iiint [\varphi\Delta\varphi + |\operatorname{grad} \varphi|^2]\, dv = \oiint \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\sigma. \tag{18}$$

Если в формуле (17) положить $\varphi = 1$, то получим

$$\iiint_{V} \Delta\psi\, dv = \oiint \frac{\partial \psi}{\partial n}\, d\sigma.$$

Поменяем в формуле (17) местами φ и ψ и вычтем получившуюся в результате формулу

$$\iiint_{V} [\psi\Delta\varphi + (\operatorname{grad} \psi, \operatorname{grad} \varphi)]\, dv = \oiint \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\sigma$$

из форму ь (7) Мы получим го да втор ю формулу Грина

$$\iiint\limits_V (\varphi \ \Delta\psi \quad \psi \ \Delta\varphi)\, dv \qquad \oiint\limits_\Sigma \left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right) d\sigma$$

Здесь пред олагается, что все функции с которыми приходится име ь де о, так же как и их производные, встречающиеся в формулах, непрерывны в рассматриваемой области

Пример 7 Най и поверх остный ин еграл

$$I - \oiint \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\, d\sigma$$

взятый по сфере Σ $x^2 + y^2 + z^2 -$ для φ x^2 y и ψ $y^2 + z^2$

Решение В силу ерво форм лы Гри а искомый инт гра равен

$$I = \iiint\limits_V [\varphi\Delta\psi \quad (\operatorname{grad}\varphi \ \operatorname{grad}\psi)]\, dv,$$

г е об аст интегрирования V шар x y^2 z $\leqslant 1$

Имеем $\Delta\psi$ 4 $\operatorname{grad}\varphi$ $2x\mathbf{i}$ $2y\mathbf{j}$ $\operatorname{grad}\psi = 2y\mathbf{j}$ $2z\mathbf{k}$ $(\operatorname{grad}\varphi \ \operatorname{grad}\psi) - 4y$ поэтому

$$I - \iiint 4x \quad 4y \quad 4y^2)\, dv \quad 4\iiint\limits_V (\ ^2 \quad 2y^2)\, dv$$

Переходя к сфери еским координатам $x - r\cos\varphi \sin\theta$, y $r\sin\varphi\sin\theta$ z $r\cos\theta$ полу им

$$I = 4\iiint\limits_V (r \ \cos \ \varphi\sin \ \theta \ \ 2r \ \sin \ \varphi\sin \ \theta) r \ \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi -$$

$$= 4\int (\cos^2\varphi \quad 2\sin \ \varphi)\, d\varphi \int \sin^3\theta\, d\theta \int\limits_0 r^4\, dr$$

$$\frac{4}{5}\int^{2} (\quad \sin^2\varphi \ \ d\varphi \int^{\pi} (1 \quad \cos \ \theta)\sin\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{2}{5}\pi\left(\quad \cos\theta \quad \frac{1}{3}\cos \ \theta\right)\Bigg| \ - \frac{16}{5}\pi$$

▷

Пример 8. Найти поаврхностный интеграл

$$I - \oiint\limits_\Sigma \left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n} \quad \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right) d\sigma$$

взятый по поверхности Σ x y^2 R^2 $z - 0$ $z = H$ $(H > 0)$ если φ $x^2 + y$ x z $\psi - x^2$ y $2z$ x

Решение. Искомый интеграл по второй формуле Грина равен

$$I = \iiint\limits_V (\varphi\,\Delta\psi - \psi\,\Delta\varphi)\,dv.$$

Для данных функций φ и ψ имеем $\Delta\varphi = 4$, $\Delta\psi = 4$ и, значит,

$$I = -4\iiint\limits_V z\,dv.$$

Переходя к цилиндрическим координатам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$, получим

$$I = -4\iiint\limits_V z\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz = -4\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^{R}\rho\,d\rho\int\limits_0^{H} z\,dz = -2\pi R^2 H^2. \qquad \triangleright$$

Пример 9. Найти поверхностный интеграл

$$I = \oiint\limits_\Sigma \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\sigma$$

по замкнутой поверхности Σ, ограниченной плоскостями $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, если $\varphi = e^x\sin y + 1$.

Решение. Данная функция является гармонической, так как $\Delta\varphi = e^x\sin y - e^x\sin y \equiv 0$. Поэтому по формуле (18) будем иметь

$$I = \iiint\limits_V |\operatorname{grad}\varphi|^2\,dv.$$

Находим модуль градиента функции φ:

$$\operatorname{grad}\varphi = e^x\sin y\,\mathbf{i} + e^x\cos y\,\mathbf{j}, \qquad |\operatorname{grad}\varphi| = e^x.$$

Искомый интеграл равен

$$I = \iiint\limits_V e^{2x}\,dv = \int\limits_0^1 e^{2x}\,dx\int\limits_0^{1-x} dy\int\limits_0^{1-x-y} dz = \frac{1}{8}(e^2-5). \qquad \triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

252. Вычислить поверхностный интеграл

$$I = \oiint\limits_\Sigma \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\,d\sigma$$

по замкнутой поверхности Σ: $\{x^2+y^2+z^2=1,\ y=0\ (y\geqslant 0)\}$, если $\varphi = z^2$, $\psi = x^2+y^2-z^2$.

253. Вычислить поверхностный интеграл

$$I = \oiint\limits_\Sigma \left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)d\sigma,$$

взятый по всей поверхности замкнутого цилиндра Σ: $\{x^2+y^2=1,\ z=0,\ z=1\}$, если $\varphi = 2x^2$, $\psi = x^2 - z^2$.

254. Вычислить поверхностный интеграл

$$I = \oiint\limits_{\Sigma} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\sigma,$$

если $\varphi = \dfrac{x+y+z}{\sqrt{3}}$, а Σ есть сфера $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

255. Найти поверхностный интеграл

$$I = \oiint\limits_{\Sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\sigma,$$

если $\varphi = e^x \sin y + e^y \sin x + z$, а Σ — трехосный эллипсоид $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

§ 22. Векторный потенциал

Пусть векторное поле

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(M) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

является соленоидальным в области G, т. е. $\operatorname{div} \mathbf{a}(M) = 0$ в G.

Определение. *Векторным потенциалом* векторного поля $\mathbf{a} = \mathbf{a}(M)$ называется вектор $\mathbf{b}(M) = P_1(x, y, z)\mathbf{i} + Q_1(x, y, z)\mathbf{j} + R_1(x, y, z)\mathbf{k}$, удовлетворяющий в области G условию

$$\operatorname{rot} \mathbf{b}(M) = \mathbf{a}(M), \tag{1}$$

или в координатной форме

$$\frac{\partial R_1}{\partial y} - \frac{\partial Q_1}{\partial z} = P, \quad \frac{\partial P_1}{\partial z} - \frac{\partial R_1}{\partial x} = Q, \quad \frac{\partial Q_1}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial y} = R. \tag{2}$$

Для соленоидального векторного поля $\mathbf{a}(M)$ векторный потенциал $\mathbf{b}(M)$ определяется неоднозначно; условию (1) удовлетворяет также вектор $\mathbf{B}(M) = \mathbf{b}(M) + \operatorname{grad} f(M)$, где $f(M)$ — произвольная дифференцируемая скалярная функция, так как $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f(M)) \equiv 0$.

Таким образом, два векторных потенциала соленоидального поля $\mathbf{a}(M)$ отличаются друг от друга на градиент скалярного поля.

Нахождение векторного потенциала $\mathbf{b}(M)$ соленоидального поля $\mathbf{a}(M)$ сводится к нахождению какого-либо частного решения системы (2) трех дифференциальных уравнений в частных производных относительно трех неизвестных функций $P_1(x, y, z)$, $Q_1(x, y, z)$, $R_1(x, y, z)$.

Векторный потенциал $\mathbf{b}(M)$ можно построить следующим образом. Пользуясь произволом в выборе вектора $\mathbf{b}(M)$, для упрощения положим, например, $P_1(x, y, z) \equiv 0$, т. е. вектор $\mathbf{b}(M)$ будем искать в виде

$\mathbf{a}(M) = Q_1(x, y, z)\mathbf{j} + R_1(x, y, z)\mathbf{k}$. В этом случае система дифференциальных уравнений (2) для нахождения неизвестных функций $Q_1(x, y, z)$ и $R_1(x, y, z)$ примет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R_1}{\partial y} - \dfrac{\partial Q_1}{\partial z} = P, \\ \dfrac{\partial R_1}{\partial x} = -Q, \\ \dfrac{\partial Q_1}{\partial x} = R. \end{cases} \tag{3}$$

Из второго и третьего уравнений этой системы находим

$$R_1(x, y, z) = -\int Q(x, y, z)\,dx + C_1(y, z),$$

$$Q_1(x, y, z) = \int R(x, y, z)\,dx + C_2(y, z),$$

где $C_1(y, z)$ и $C_2(y, z)$ — любые дифференцируемые функции y и z. Положим для упрощения $C_2(y, z) = 0$ и выберем функцию $C_1(y, z)$ так, чтобы удовлетворялось и первое уравнение системы (3). Для этого подставляем в первое уравнение найденные выражения для Q_1 и R_1:

$$-\frac{\partial}{\partial y}\int Q(x, y, z)\,dx + \frac{\partial C_1}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z}\int R(x, y, z)\,dx = P(x, y, z).$$

Отсюда найдем

$$\frac{\partial C_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int Q(x, y, z)\,dx + \frac{\partial}{\partial z}\int R(x, y, z)\,dx + P(x, y, z).$$

Легко проверить, что правая часть этого уравнения не зависит от x в силу того, что $\operatorname{div}\mathbf{a}(M) = 0$ в G.

Интегрируя последнее равенство по y, найдем

$$C_1(y, z) = \int \left[\frac{\partial}{\partial y}\int Q(x, y, z)\,dx + \frac{\partial}{\partial z}\int R(x, y, z)\,dx + P(x, y, z)\right] dy + C_3(z). \tag{4}$$

Полагая в (4) $C_3(z) = 0$ и подставляя (4) в выражение для $R_1(x, y, z)$, получим частное решение системы (3):

$$P_1 = 0, \tag{5}$$

$$Q_1 = \int R(x, y, z)\,dx, \tag{6}$$

$$R_1 = \int \left[\frac{\partial}{\partial y} \int Q(x, y, z)\, dx - \frac{\partial}{\partial z} \int R(x, y, z)\, dx - P(x, y, z) \right] dy -$$

$$- \int Q(x, y, z)\, dx. \qquad (7)$$

Вектор $\mathbf{b}(M)$, координаты $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$ которого определяются формулами (5), (6), (7), является векторным потенциалом, так как он удовлетворяет условию $\operatorname{rot} \mathbf{b} = \mathbf{a}$.

Пример 1. Найти векторный потенциал $\mathbf{b} = \mathbf{b}(x, y, z)$ для соленоидального поля, задаваемого вектором $\mathbf{a} = 2y\mathbf{i} - z\mathbf{j} + 2x\mathbf{k}$.

Решение. Потенциал $\mathbf{b}$ ищем в виде

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}(x, y, z) = Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k},$$

где $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$ находим по формулам (6) и (7). Так как в данном случае $P = 2y$, $Q = -z$, $R = 2x$, то будем иметь

$$Q(x, y, z) = \int 2x\, dx = x^2, \qquad R(x, y, z) = \int z\, dx - \int 2y\, dy = xz - y^2.$$

Итак,

$$\mathbf{b}(x, y, z) = x^2\mathbf{j} + (xz - y^2)\mathbf{k}.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что $\operatorname{rot} \mathbf{b} = \mathbf{a}$, и, значит, этот вектор является векторным потенциалом данного поля. ▷

Замечание. В виду произвола, допустимого при выборе вектора $\mathbf{b}$, вместо условия $P_1(x, y, z) = 0$ можно потребовать, чтобы $Q(x, y, z) = 0$ или $R(x, y, z) = 0$. Система уравнений (4) и формулы (5), (6), (7) соответственно изменятся.

Задачи для самостоятельного решения

Найти векторные потенциалы соленоидальных полей.

256. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

257. $\mathbf{a} = 2y\mathbf{i} + 2z\mathbf{j}$.

258. $\mathbf{a} = (e^x - e^y)\mathbf{k}$.

259. $\mathbf{a} = 6y^2\mathbf{i} + 6z\mathbf{j} + 6x\mathbf{k}$.

260. $\mathbf{a} = 3y^2\mathbf{i} - 3x^2\mathbf{j} - (y^2 + 2x)\mathbf{k}$.

261. $\mathbf{a} = ye^x\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} - (2xyze^x + z^2)\mathbf{k}$.

Если векторное поле $\mathbf{a} = \mathbf{a}(M)$ соленоидально в области G, которая является звездной (см. § 19, п. IV) с центром в начале координат $O(0, 0, 0)$ (поле $\mathbf{a}(M)$ может быть не определено в точке O), то один из векторных потенциалов $\mathbf{b} = \mathbf{b}(M)$ можно найти по формуле

$$\mathbf{b}(M) = \int_0^1 [\mathbf{a}(M'), \mathbf{r}(M)]\, t\, dt, \qquad (8)$$

где $\mathbf{r}(M) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ есть радиус-вектор точки $M(x, y, z)$, а точка $M'(tx, ty, tz)$ при изменении параметра t от 0 до 1 пробегает отрезок OM.

Пример 2. Пользуясь формулой (8), найти векторный потенциал соленоидального поля $\mathbf{a} = 2y\mathbf{i} - z\mathbf{j} + 2x\mathbf{k}$.

◁ *Решение.* Данное векторное поле определено во всем трехмерном пространстве, которое является звездной областью с центром в начале координат, поэтому для нахождения векторного потенциала можно применить формулу (8). В точке $M'(tx, ty, tz)$ имеем

$$\mathbf{a}(M') = 2ty\mathbf{i} - tz\mathbf{j} + 2tx\mathbf{k}.$$

Находим векторное произведение

$$[\mathbf{a}(M'), \mathbf{r}(M)] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2ty & -tz & 2tx \\ x & y & z \end{vmatrix} = \left[-(2xy + z^2)\mathbf{i} + (2x^2 - 2yz)\mathbf{j} + (2y^2 + xz)\mathbf{k}\right] t.$$

По формуле (8) находим

$$\mathbf{b}(M) = \int \left[-(2xy + z^2)\mathbf{i} + (2x^2 - 2yz)\mathbf{j} + (2y^2 + xz)\mathbf{k}\right] t\, dt =$$

$$= -\frac{1}{3}(2xy - z^2)\mathbf{i} + \frac{2}{3}(x^2 + yz)\mathbf{j} + \frac{1}{3}(2y^2 + xz)\mathbf{k}.$$

Легко установить, что $\operatorname{rot} \mathbf{b}(M) = \mathbf{a}(M)$. ▷

Замечание. В примерах 1 и 2 для одного и того же соленоидального поля $\mathbf{a} = 2y\mathbf{i} - z\mathbf{j} + 2x\mathbf{k}$ получены разные векторные потенциалы:

$$\mathbf{b}_1(M) = x^2\mathbf{j} + (xz - y^2)\mathbf{k},$$

$$\mathbf{b}_2(M) = -\frac{1}{3}(2xy + z^2)\mathbf{i} + \frac{2}{3}(x^2 - yz)\mathbf{j} + \frac{1}{3}(2y^2 + xz)\mathbf{k}.$$

Они отличаются друг от друга слагаемым, равным градиенту некоторого скалярного поля $f(M)$. Это слагаемое играет роль произвольной постоянной (при действии на нее ротора). Оно представимо как градиент некоторой скалярной функции $f(M)$. Найдем эту функцию в нашем случае. Имеем

$$\operatorname{grad} f(M) = \mathbf{b}_1(M) - \mathbf{b}_2(M) = \frac{1}{3}(2xy + z^2)\mathbf{i} + \frac{1}{3}(x^2 + 2yz)\mathbf{j} + \frac{1}{3}(2xz + y^2)\mathbf{k}.$$

Для нахождения скалярного поля $f(M)$ применим формулу (3) из § 19, в которой за точку (x_0, y_0, z_0) возьмем начало координат $O(0, 0, 0)$. Тогда получим

$$f(M) = \int_0^x 0\, dx + \int^y \frac{1}{3}x^2\, dy + \int_0^z \frac{1}{3}(2xz + y^2)\, dz + C = \frac{1}{3}(x^2y + y^2z + z^2x) + C,$$

где C — произвольная постоянная.

Пример 3. Найти векторный потенциал $\mathbf{b}$ магнитного поля $\mathbf{H}$, создаваемого электрическим зарядом e, движущимся с постоянной скоростью $\mathbf{v}$.

Решение. Согласно закону Био—Савара напряженность магнитного поля равна

$$\mathbf{H}(M) = \frac{e[\mathbf{v}, \mathbf{r}]}{4\pi r^3}, \tag{9}$$

где r — расстояние от точки M до заряда e.

Так как $\mathbf{H}$ является соленоидальным вектором ($\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$), то для него существует векторный потенциал $\mathbf{b}$ такой, что $\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{b}$ и, учитывая формулу (9),

$$\operatorname{rot} \mathbf{b} = \frac{[e\mathbf{v}, \mathbf{r}]}{4\pi r^3} = \frac{e}{4\pi} \frac{[\mathbf{v}, \mathbf{r}]}{r^3}.$$

Перепишем последнюю формулу в виде

$$\operatorname{rot} \mathbf{b} = \frac{1}{4\pi}\left\{\left[e\mathbf{v}, \frac{x}{r^3}\mathbf{i}\right] + \left[e\mathbf{v}, \frac{y}{r^3}\mathbf{j}\right] + \left[e\mathbf{v}, \frac{z}{r^3}\mathbf{k}\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left\{\left[\mathbf{i}, -\frac{ex\mathbf{v}}{r^3}\right] + \left[\mathbf{j}, -\frac{ey\mathbf{v}}{r^3}\right] + \left[\mathbf{k}, -\frac{ez\mathbf{v}}{r^3}\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left\{\left[\mathbf{i}, \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e\mathbf{v}}{r}\right)\right] + \left[\mathbf{j}, \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{e\mathbf{v}}{r}\right)\right] + \left[\mathbf{k}, \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{e\mathbf{v}}{r}\right)\right]\right\}.$$

Применяя легко проверяемое равенство

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \left[\mathbf{i}, \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x}\right] + \left[\mathbf{j}, \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y}\right] + \left[\mathbf{k}, \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z}\right],$$

получим

$$\operatorname{rot} \mathbf{b} = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \frac{e\mathbf{v}}{r},$$

откуда

$$\mathbf{b} = \frac{1}{4\pi} \frac{e\mathbf{v}}{r}. \qquad \triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

Пользуясь формулой (8), найти векторные потенциалы соленоидальных полей, определенных в звездных областях.

262. $\mathbf{a} = \mathbf{i}$. **263.** $\mathbf{a} = 6x\mathbf{i} - 15y\mathbf{j} + 9z\mathbf{k}$.

264. $\mathbf{a} = 5x^2y\mathbf{i} - 10xyz\mathbf{k}$. **266.** $\mathbf{a} = 2\cos xz\,\mathbf{j}$.

266. $\mathbf{a} = \dfrac{-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 > 0$.

ГЛАВА 6

Криволинейные координаты. Основные операции векторного анализа в криволинейных координатах

§ 23. Криволинейные координаты

Во многих задачах удобнее определять положение точки M пространства не тремя декартовыми координатами (x, y, z), а тремя другими числами (q_1, q_2, q_3), более отвечающими рассматриваемой частной задаче.

Пусть каждой точке M отвечает определенная тройка чисел (q_1, q_2, q_3) и, обратно, каждой такой тройке чисел отвечает единственная точка M. В этом случае величины q_1, q_2, q_3 называют *криволинейными координатами* точки M.

Координатными поверхностями в системе криволинейных координат q_1, q_2, q_3 называются поверхности

$$q_1 = C_1 \qquad (1)$$

$$q_2 = C_2 \qquad (2)$$

$$q_3 = C_3 \qquad (3)$$

на которых одна из координат сохраняет постоянное значение. Линии пересечения двух координатных поверхностей называются *координатными линиями*.

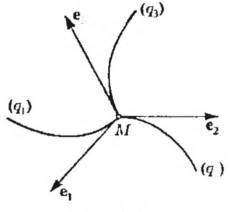

Рис. 37

Вдоль линии пересечения координатных поверхностей (2) и (3) координаты q_2 и q_3 сохраняют постоянные значения; изменяется только координата q_1. Аналогично на линиях пересечения поверхностей (1) и (3) или (1) и (2) меняются соответственно только q_2 и q_3.

Введем единичные векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, направленные по касательным к координатным линиям (q_1), (q_2), (q_3) в точке M в сторону возрастания переменных q_1, q_2, q_3 соответственно (рис. 37). Условимся брать орты $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ всегда в таком порядке, чтобы их совокупность составляла правую тройку.

Подчеркнем коренное отличие криволинейных координат от обычных декартовых координат. В декартовой системе векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ постоянны для всех точек пространства и равны соответственно $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$.

Во всякой другой системе они будут, вообще говоря, изменять свои направления при переходе от одной точки M к другой.

В качестве примеров криволинейных координат рассмотрим цилиндрические и сферические координаты.

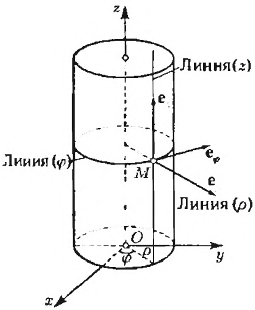

Рис. 38

1°. Цилиндрические координаты. В цилиндрических координатах положение точки M пространства определяется тремя координатами

$$
\begin{aligned}
q_1 &= \rho, \quad 0 < \rho < +\infty, \\
q_2 &= \varphi \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi \\
q_3 &= z \quad -\infty < z < +\infty.
\end{aligned} \tag{4}
$$

Координатными поверхностями являются:

$\rho = \text{const}$ — круговые цилиндры с осью Oz

$\varphi = \text{const}$ — полуплоскости, примыкающие к оси Oz,

$z = \text{const}$ — плоскости перпендикулярные оси Oz

Координатными линиями являются: линии (ρ) — лучи, перпендикулярные оси Oz и имеющие начало на этой оси; линии (φ) — окружности с центром на оси Oz, лежащие в плоскостях, перпендикулярных этой оси; линии (z) — прямые, параллельные оси Oz (рис. 38).

Связь декартовых координат с цилиндрическими определяется формулами

$$
\begin{aligned}
x &= \rho\cos\varphi \\
y &= \rho\sin\varphi \\
z &= z
\end{aligned} \tag{5}
$$

2°. Сферические координаты. В сферических координатах положение точки M пространства определяется следующими координатами.

$$
\begin{aligned}
q_1 &= r \quad 0 \leqslant r < +\infty \\
q_2 &= \theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \\
q_3 &= \varphi, \quad -\infty \leqslant \varphi < 2\pi
\end{aligned} \tag{6}
$$

Координатными поверхностями являются (рис. 39).

$r = \text{const}$ — сферы с центром в точке O;

$\theta = \text{const}$ — круговые полуконусы с осью Oz;

$\varphi = \text{const}$ — полуплоскости, примыкающие к оси Oz.

Координатными линиями являются:

линии (r) — лучи, выходящие из точки O;
линии (θ) — меридианы на сфере;
линии (φ) — параллели на сфере.

Связь декартовых координат со сферическими определяется формулами:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\sin\theta, \\ y &= r\sin\varphi\sin\theta, \\ z &= z\cos\theta \end{aligned} \tag{7}$$

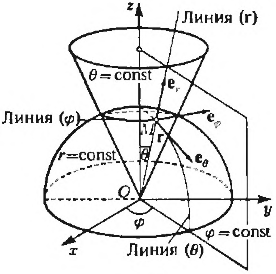

Рис. 39

Система криволинейных координат называется *ортогональной*, если в каждой точке M орты $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ попарно ортогональны. Координатные линии и координатные поверхности в такой системе будут также ортогональны. Системы цилиндрических и сферических координат служат примером ортогональных криволинейных систем координат. В дальнейшем будут рассматриваться только ортогональные системы координат.

Пусть $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2, q_3)$ — радиус-вектор точки M. Тогда

$$d\mathbf{r} = H_1\,dq_1\mathbf{e}_1 + H_2\,dq_2\mathbf{e}_2 + h_3\,dq_3\mathbf{e}_3. \tag{8}$$

Здесь

$$H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}, \quad i = 1, 2, 3$$

— коэффициенты Ламэ данной криволинейной системы координат.

В цилиндрических координат

$$q_1 = \rho, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = z,$$

в силу (5) имеем

$$H_1 = H_\rho = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2} = 1,$$

$$H_2 = H_\varphi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = \rho,$$

$$H_3 = H_z = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2} = 1.$$

В сферических координатах

$$q_1 = r, \quad q_2 = \theta, \quad q_3 = \varphi$$

в силу (7) имеем

$$H_1 = H_r = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = 1,$$

$$H_2 = H_\theta = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2} = r,$$

$$H_3 = H_\varphi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = r \sin\theta.$$

Величины

$$dl_i = H_i\, dq_i, \qquad i = 1, 2, 3,$$

фигурирующие в формуле (8), являются *дифференциалами длин дуг координатных линий*. Это соображение в ряде случаев позволяет более просто вычислять коэффициенты Ламэ. Так, в случае цилиндрических координат (4) (см. рис. 38) дифференциалы длин дуг координатных линий (ρ), (φ), (z) будут

$$d(\rho) = 1 \cdot d\rho, \quad \text{откуда} \quad H_1 = 1;$$

$$d(\varphi) = \rho \cdot d\varphi, \quad \text{откуда} \quad H_2 = \rho,$$

$$d(z) = 1 \cdot dz \quad \text{откуда} \quad H_3 = 1$$

Так же просто получаются выражения для коэффициентов Ламэ в случае сферических координат (6).

§ 24. Основные операции векторного анализа в криволинейных координатах

1°. Дифференциальные уравнения векторных линий. Пусть имеем векторное поле

$$\mathbf{a} = a_1(q_1, q_2, q_3)\mathbf{e}_1 + a_2(q_1, q_2, q_3)\mathbf{e}_2 + a_3(q_1, q_2, q_3)\mathbf{e}_3.$$

Уравнения векторных линий в криволинейных координатах q_1, q_2, q_3 имеют вид

$$\frac{H_1\, dq_1}{a_1(q_1, q_2, q_3)} = \frac{H_2\, dq_2}{a_2(q_1, q_2, q_3)} = \frac{H_3\, dq_3}{a_3(q_1, q_2, q_3)}.$$

В частности, в цилиндрических координатах ($q_1 = \rho$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$):

$$\frac{d\rho}{a_1(\rho, \varphi, z)} = \frac{\rho\, d\varphi}{a_2(\rho, \varphi, z)} = \frac{dz}{a_3(\rho, \varphi, z)}. \tag{1}$$

в сферических координатах ($q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \varphi$)

$$\frac{dr}{a_1(r,\theta,\varphi)} = \frac{r\,d\theta}{a_2(r,\theta,\varphi)} = \frac{r\sin\theta\,d\varphi}{a_3(r,\theta,\varphi)}.$$

Пример 1. Векторное поле задано в цилиндрических координатах $\mathbf{a}(M) = \mathbf{e}_\rho + \varphi\mathbf{e}_\varphi$. Найти векторные линии этого поля.

Решение. По условию задачи $a_1 = 1$, $a_2 = \varphi$, $a_3 = 0$. В силу формулы (1) имеем

$$\frac{d\rho}{1} = \frac{\rho\,d\varphi}{\varphi} = \frac{dz}{0}.$$

Отсюда

$$\begin{cases} z = C_1, \\ \rho = C_2\varphi \end{cases}$$

— это спирали Архимеда, лежащие в плоскостях, параллельных плоскости xOy. ▷

2°. Градиент в ортогональных координатах.

Пусть имеем скалярное поле

$$u = u(q_1, q_2, q_3).$$

Тогда

$$\operatorname{grad} u = \frac{1}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\mathbf{e}_2 + \frac{1}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\mathbf{e}_3.$$

В частности, в цилиндрических координатах ($q_1 = \rho$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$)

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial \rho}\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{e}_z, \tag{2}$$

в сферических координатах ($q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \varphi$)

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi. \tag{3}$$

Пример 2. Вычислить градиент скалярного поля, заданного в цилиндрических координатах (ρ, φ, z): $u = \rho + z\cos\varphi$.

Решение. Пользуясь формулой (2), получаем

$$\operatorname{grad} u = \mathbf{e}_\rho - \frac{1}{\rho}z\sin\varphi\,\mathbf{e}_\varphi + \cos\varphi\,\mathbf{e}_z. \qquad ▷$$

Пример 3. Найти градиент скалярного поля, заданного в сферических координатах (r, θ, φ): $u = r + \dfrac{\sin\theta}{r} - \sin\theta\cos\varphi$.

Решение. Пользуясь формулой (3), будем иметь

$$\operatorname{grad} u = \left(1 - \frac{\sin\theta}{r^2}\right)\mathbf{e}_r + \frac{\cos\theta}{r}\left(\frac{1}{r} - \cos\varphi\right)\mathbf{e}_\theta + \frac{\sin\varphi}{r}\mathbf{e}_\varphi.$$

3°. Ротор в ортогональных координатах. Пусть

$$\mathbf{a} = a_1(q_1, q_2, q_3)\mathbf{e}_1 + a_2(q_1, q_2, q_3)\mathbf{e}_2 + a_3(q_1, q_2, q_3)\mathbf{e}_3.$$

Тогда

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{H_2H_3}\mathbf{e}_1 & \dfrac{1}{H_1H_3}\mathbf{e}_2 & \dfrac{1}{H_1H_2}\mathbf{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial q_1} & \dfrac{\partial}{\partial q_2} & \dfrac{\partial}{\partial q_3} \\ a_1H_1 & a_2H_2 & a_3H_3 \end{vmatrix}.$$

В частности, в цилиндрических координатах ($q_1 = \rho$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$):

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{\rho}\mathbf{e}_\rho & \mathbf{e}_\varphi & \dfrac{1}{\rho}\mathbf{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial \rho} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_1 & \rho a_2 & a_3 \end{vmatrix}; \tag{4}$$

в сферических координатах ($q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \varphi$)

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{r^2\sin\theta}\mathbf{e}_r & \dfrac{1}{r\sin\theta}\mathbf{e}_\theta & \dfrac{1}{r}\mathbf{e}_\varphi \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} \\ a_1 & ra_2 & r\sin\theta\, a_3 \end{vmatrix}. \tag{4'}$$

Пример 4. Вычислить ротор векторного поля, заданного в цилиндрических координетах: $\mathbf{a} = \sin\varphi\,\mathbf{e}_\rho + \dfrac{\cos\varphi}{\rho}\mathbf{e}_\varphi - \rho z\mathbf{e}_z$.

◁ *Решение.* Воспользовавшись формулой (4), будем иметь

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{\rho}\mathbf{e}_\rho & \mathbf{e}_\varphi & \dfrac{1}{\rho}\mathbf{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial \rho} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \sin\varphi & \cos\varphi & -\rho z \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho}\mathbf{e}_\rho(0-0) - \mathbf{e}_\varphi(-z-0) +$$

$$+ \frac{1}{\rho}\mathbf{e}_z(0-\cos\varphi) = z\mathbf{e}_\varphi - \frac{\cos\varphi}{\rho}\mathbf{e}_z. \quad ▷$$

4°. Дивергенция в ортогональных координатах. Пусть задано векторное поле

$$\mathbf{a} = a_1(q_1, q_2, q_3)\mathbf{e}_1 + a_2(q_1, q_2, q_3)\mathbf{e}_2 + a_3(q_1, q_2, q_3)\mathbf{e}_3.$$

Тогда

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial(a_1H_2H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(a_2H_1H_3)}{\partial q_2} + \frac{\partial(a_3H_1H_2)}{\partial q_3}\right].$$

В частности, в цилиндрических координатах ($q_1 = \rho$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$)

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho a_1)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial a_2}{\partial\varphi} + \frac{\partial a_3}{\partial z},$$

в сферических координатах ($q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \varphi$):

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2a_1)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta\cdot a_2)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial a_3}{\partial\varphi}. \tag{5}$$

Пример 5. Показать, что векторное поле $\mathbf{a} = \dfrac{2\cos\theta}{r^3}\mathbf{e}_r + \dfrac{\sin\theta}{r^3}\mathbf{e}_\theta$ соленоидально.

Решение. Пользуясь формулой (5), будем иметь

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{2\cos\theta}{r^3}\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\sin\theta}{r^3}\right) + 0 =$$

$$= \frac{1}{r^2}\left(-\frac{2\cos\theta}{r^2}\right) + \frac{1}{r^4\sin\theta}2\sin\theta\cos\theta = 0$$

всюду, где $r \neq 0$. Это и означает, что векторное поле $\mathbf{a}$ соленоидально всюду, кроме точки $r = 0$. ▷

Задачи для самостоятельного решения

267. Найти уравнение векторных линий следующих полей

а) $\mathbf{a} = \mathbf{e}_\rho + \rho\mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_z$; б) $\mathbf{a} = \rho\mathbf{e}_\rho + \varphi\mathbf{e}_\varphi + z\mathbf{e}_z$; в) $\mathbf{a} = \dfrac{2\alpha\cos\theta}{r^3}\mathbf{e}_r + \dfrac{\alpha\sin\theta}{r^3}\mathbf{e}_\theta$, $\alpha = \text{const}$.

Найти градиенты скалярных полей.

а) В цилиндрических координатах

268. $u = \rho^2 + 2\rho\cos\varphi - e^z\sin\varphi$. **269.** $u = \rho\cos\varphi + z\sin^2\varphi - 3^\rho$.

б) В сферических координатах

270. $u = r^2\cos\theta$. **271.** $u = 3r^2\sin\theta + e^r\cos\varphi - r$. **272.** $u = \dfrac{\mu\cos\theta}{r^2}$, $\mu = \text{const}$.

Вычислить дивергенцию векторных полей:

а) В цилиндрических координатах

273. $\mathbf{a} = \rho\mathbf{e}_\rho + z\sin\varphi\mathbf{e}_\varphi + e^\varphi\cos z\mathbf{e}_z$. **274.** $\mathbf{a} = \varphi\operatorname{arctg}\rho\mathbf{e}_\rho + 2\mathbf{e}_\varphi - z^2e^z\mathbf{e}_z$.

б) В сферических координатах

275. $\mathbf{a} = r^2\mathbf{e}_r - 2\cos^2\varphi\mathbf{e}_\theta + \dfrac{\varphi}{r^2+1}\mathbf{e}_\varphi$.

Вычислить ротор следующих векторных полей:

276. $\mathbf{a} = (2r + \alpha\cos\varphi)\mathbf{e}_r - \alpha\sin\theta\mathbf{e}_\theta + r\cos\theta\mathbf{e}_\varphi$, $\alpha = \mathrm{const}$

277. $\mathbf{a} = r^2\mathbf{e}_r + 2\cos\theta\mathbf{e}_\theta - \varphi\mathbf{e}_\varphi$

278. $\mathbf{a} = \cos\varphi\mathbf{e}_\rho - \dfrac{\sin\varphi}{\rho}\mathbf{e}_\varphi - \rho^2\mathbf{e}_z$

279. Показать, что векторное поле $\mathbf{a} = \dfrac{2\cos\theta}{r^3}\mathbf{e}_r + \dfrac{\sin\theta}{r^3}\mathbf{e}_\theta$ является потенциальным.

280. Показать, что векторное поле $\mathbf{a} = f(r)\mathbf{e}_r$, где $f(r)$ — любая дифференцируемая функция, является потенциальным.

5°. Вычисление потока в криволинейных координатах.

Пусть S — часть координатной поверхности $q_1 = C$, где $C = \mathrm{const}$, ограниченная координатными линиями

$$q_2 = \alpha_1, \quad q_2 = \alpha_2 \quad (\alpha_1 < \alpha_2),$$
$$q_3 = \beta_1, \quad q_3 = \beta_2 \quad (\beta_1 < \beta_2).$$

Тогда поток векторного поля

$$\mathbf{a} = a_1(q_1, q_2, q_3)\mathbf{e}_1 + a_2(q_1, q_2, q_3)\mathbf{e}_2 + a_3(q_1, q_2, q_3)\mathbf{e}_3$$

через поверхность S в направлении вектора $\mathbf{e}_1$ вычисляется по формуле

$$\Pi = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\int_{\beta_1}^{\beta_2} a_1(C, q_2, q_3)H_2(C, q_2, q_3)H_3(C, q_2, q_3)\,dq_3\,dq_2. \tag{6}$$

Аналогично вычисляется поток через часть поверхности $q_2 = C$ или через часть поверхности $q_3 = C$, где $C = \mathrm{const}$.

Пример 6. Вычислить поток векторного поля, заданного в цилиндрических координатах: $\mathbf{a} = \rho\mathbf{e}_\rho + z\mathbf{e}_\varphi$ через внешнюю часть боковой поверхности цилиндра $\rho = 1$, ограниченного плоскостями $z = 0$, $z = 1$.

◁ <u>Решение</u>. Цилиндр является координатной поверхностью $\rho = C = \mathrm{const}$, а поэтому искомый поток

$$\Pi = \int_0^{2\pi}\int_0^1 C^2\,dz\,d\varphi = 2\pi C^2.$$

Отсюда для поверхности $\rho = 1$ получаем

$$\Pi = 2\pi. \quad \triangleright$$

Пример 7. Найти поток векторного поля, заданного в сферических координатах: $\mathbf{a} = r^2\theta\mathbf{e}_r + re^2\theta\mathbf{e}_\theta$ через внешнюю сторону верхней полусферы S радиуса R с центром в начале координат.

◁ <u>Решение</u>. Полусфера S является часть координатной поверхности $r = \mathrm{const}$, именно $r = R$. На поверхности S имеем

$$q_1 = r = R, \quad q_2 = \theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}; \quad q_3 = \varphi, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

Учитывая, что в сферических координатах

$$H_1 = H_r = 1, \quad H_2 = H_\theta = r, \quad H_3 = H_\varphi = r\sin\theta,$$

по формуле (6) найдем

$$\Pi = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} R^4\theta\sin\theta\, d\varphi = 2\pi R^4 \int_0^{\pi/2} \theta\sin\theta\, d\theta = 2\pi R^4. \qquad \triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить поток векторного поля, заданного в цилиндрических координатах, через данную поверхность S.

281. $\mathbf{a} = \rho\mathbf{e}_\rho - \cos\varphi\mathbf{e}_\varphi + z\mathbf{e}_z$, S — замкнутая поверхность, образованная цилиндром $\rho = 2$ и плоскостями $z = 0$ и $z = 2$.

282. $\mathbf{a} = \rho\mathbf{e}_\rho + \rho\varphi\mathbf{e}_\varphi - 2z\mathbf{e}_z$, S — замкнутая поверхность, образованная цилиндром $\rho = 1$, полуплоскостями $\varphi = 0$ и $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ и плоскостями $z = -1$, $z = 1$.

283. Найти поток векторного поля $\mathbf{a} = \dfrac{1}{r}\mathbf{e}_r$ через сферу радиуса R с центром в начале координат.

284. Найти поток векторного поля, заданного в сферических координатах: $\mathbf{a} = r\mathbf{e}_r + r\sin\theta\mathbf{e}_\theta - 3r\varphi\sin\theta\mathbf{e}_\varphi$, через верхнюю полусферу радиуса R.

285. Найти поток векторного поля, заданного в сферических координатах: $\mathbf{a} = r^2\mathbf{e}_r + R^2\cos\varphi\mathbf{e}_\varphi$, через сферу $r = R$.

286. Найти поток векторного поля, заданного в сферических координатах, $\mathbf{a} = r\mathbf{e}_r - r\sin\theta\mathbf{e}_\varphi$, через поверхность, ограниченную полусферой радиуса R и плоскостью $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$, в направлении вектора $\mathbf{e}_\varphi$.

287. Найти поток векторного поля, заданного в сферических координатах, $\mathbf{a} = r\sin\dfrac{\varphi}{2}\mathbf{e}_\theta + r\sin\theta\cos\varphi\mathbf{e}_\varphi$, через внешнюю сторону замкнутой поверхности, образованной верхней частью конуса $\sqrt{3}z = x^2 + y^2$ и плоскостью $z = \sqrt{3}$ $(0 \leqslant z \leqslant \sqrt{3})$.

6°. Нахождение потенциала в криволинейных координатах. Пусть в криволинейных координатах q_1, q_2, q_3 задано векторное поле

$$\mathbf{a}(M) = a_1(q_1, q_2, q_3)\mathbf{e}_1 + a_2(q_1, q_2, q_3)\mathbf{e}_2 + a_3(q_1, q_2, q_3)\mathbf{e}_3,$$

которое является потенциальным в некоторой области Ω изменения переменных q_1, q_2, q_3, т. е. $\operatorname{rot}\mathbf{a} \equiv 0$ в Ω.

Для нахождения потенциала $u = u(q_1, q_2, q_3)$ этого поля равенство $\mathbf{a}(M) = \operatorname{grad} u(M)$ записывается в виде

$$a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 = \frac{1}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\mathbf{e}_2 + \frac{1}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\mathbf{e}_3.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial q_1} = a_1H_1, \quad \frac{\partial u}{\partial q_2} = a_2H_2, \quad \frac{\partial u}{\partial q_3} = a_3H_3. \tag{7}$$

Это есть система дифференциальных уравнений с частными производными, интегрируя которую найдем искомый потенциал $u = u(q_1, q_2, q_3) + C$, где C — произвольная постоянная.

Система дифференциальных уравнений (7) решается так же, как при нахождении потенциала в декартовых координатах.

Система дифференциальных уравнений (7) имеет вид:

1) в цилиндрических координатах ($q_1 = \rho$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$)

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = a_\rho, \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = \rho a_\varphi, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = a_z, \tag{7'}$$

2) в сферических координатах ($q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \varphi$)

$$\frac{\partial u}{\partial r} = a_r, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = r a_\theta, \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = r \sin\theta \, a_\varphi. \tag{7''}$$

Пример 8. Найти потенциал векторного поля, заданного в цилиндрических координатах: $\mathbf{a} = \left(\frac{\operatorname{arctg} z}{\rho} + \cos\varphi\right)\mathbf{e}_\rho - \sin\varphi\mathbf{e}_\varphi + \frac{\ln\rho}{1+z^2}\mathbf{e}_z$.

Решение. По формуле (4) находим

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\rho}\mathbf{e}_\rho & \mathbf{e}_\varphi & \frac{1}{\rho}\mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\operatorname{arctg} z}{\rho} + \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & \frac{\ln\rho}{1+z^2} \end{vmatrix} = 0 \quad (\rho > 0),$$

т. е. данное поле потенциально. Искомый потенциал $u = u(\rho, \varphi, z)$ является решением следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{\operatorname{arctg} z}{\rho} + \cos\varphi, \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\sin\varphi \cdot \rho, \\ \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\ln\rho}{1+z^2}. \end{cases}$$

Из первого уравнения интегрированием по ρ находим, что

$$u = \ln\rho \cdot \operatorname{arctg} z + \rho\cos\varphi + C(\varphi, z). \tag{8}$$

Дифференцируя (8) по φ, получим

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\rho\sin\varphi + \frac{\partial C}{\partial \varphi},$$

и так как $\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\rho\sin\varphi$, то $\frac{\partial C}{\partial \varphi} = 0$, т. е. $C = C_1(z)$. Таким образом,

$$u = \ln\rho \cdot \operatorname{arctg} z + \rho\cos\varphi + C_1(\varphi, z)$$

Отсюда

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\ln \rho}{1+z^2} + C_1'(z).$$

В силу третьего уравнения системы имеем

$$\frac{\ln \rho}{1+z^2} = \frac{\ln \rho}{1+z^2} + C'(z),$$

т. е. $C'(z) \equiv 0$, откуда $C(z) \equiv C = \text{const}$

Итак, потенциал данного поля

$$u(\rho, \varphi, z) = \ln \rho \cdot \operatorname{arctg} z + \rho \cos \varphi + C \qquad \triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

В следующих задачах убедиться в том, что векторные поля, заданные в цилиндрических координатах, являются потенциальными, и найти их потенциалы

288. $\mathbf{a} = \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\mathbf{e}_\varphi - \mathbf{e}_z$ **289.** $\mathbf{a} = \rho \mathbf{e}_\rho + \frac{\varphi}{\rho}\mathbf{e}_\varphi + z\mathbf{e}_z$

290. $\mathbf{a} = \varphi z \mathbf{e}_\rho + z\mathbf{e}_\varphi + \rho\varphi\mathbf{e}_z$. **291.** $\mathbf{a} = e^\rho \sin\varphi \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}e^\rho \cos\varphi \mathbf{e}_\varphi + 2z\mathbf{e}_z$

292. $\mathbf{a} = \varphi \cos z \mathbf{e}_\rho + \cos z \mathbf{e}_\varphi - \rho\varphi \sin z \mathbf{e}_z$.

Пример 9. Найти потенциал векторного поля, заданного в сферических координатах: $\mathbf{a} = \frac{1}{r}e^{\theta\varphi}\mathbf{e}_r + \frac{\ln r}{r}\varphi e^{\theta\varphi}\mathbf{e}_\theta + \frac{\theta \ln r}{r \sin\theta}e^{\theta\varphi}\mathbf{e}_\varphi$

Решение. По формуле (4') получаем, что

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & r\sin\theta\mathbf{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{1}{r}e^{\theta\varphi} & \varphi \ln r \cdot e^{\theta\varphi} & \theta \ln r \cdot e^{\theta\varphi} \end{vmatrix} = 0.$$

Данное поле потенциально в области, где $r > 0$, $\theta \neq n\pi$ ($n = 0, \pm 1, \ldots$)

Система дифференциальных уравнений (7) для нахождения потенциала $u = u(r, \theta, \varphi)$ имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}e^{\theta\varphi}, \\ \frac{\partial u}{\partial \theta} = \varphi e^{\theta\varphi} \ln r, \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi} = \theta e^{\theta\varphi} \ln r. \end{cases} \tag{9}$$

Интегрируя первое уравнение системы (9), получим

$$u = e^{\theta\varphi} \ln r + C(\varphi, \theta) \tag{10}$$

Дифференцируя (10) по θ и учитывая второе уравнение системы, будем иметь

$$\varphi e^{\theta\varphi}\ln r = \varphi e^{\theta\varphi}\ln r + \frac{\partial C}{\partial\theta},$$

т. е. $\dfrac{\partial C}{\partial\theta}\equiv 0$, откуда $C(\varphi,\theta)\equiv C_1(\varphi)$, и значит,

$$u = e^{\theta\varphi}\ln r + C_1(\varphi). \tag{11}$$

Дифференцируя (11) по φ и принимая во внимание третье уравнение системы (9), найдем

$$\theta e^{\theta\varphi}\ln r = \theta e^{\theta\varphi}\ln r + C_1'(\varphi),$$

или $C_1'(\varphi)\equiv 0$, откуда $C_1(\varphi)\equiv C = \text{const}$. Искомый потенциал равен

$$u(r,\theta,\varphi) = e^{\theta\varphi}\ln r + C. \qquad \triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

Установить потенциальность следующих векторных полей, заданных в сферических координатах, и найти их потенциалы.

293. $\mathbf{a} = \theta\mathbf{e}_r + \mathbf{e}_\theta$.

294. $\mathbf{a} = 2r\mathbf{e}_r + \dfrac{1}{r\sin\theta}\mathbf{e}_\varphi + \dfrac{1}{r}\mathbf{e}_\theta$.

295. $\mathbf{a} = \dfrac{1}{2}\varphi^2\mathbf{e}_r + \dfrac{\varphi}{\sin\theta}\mathbf{e}_\varphi + \dfrac{\theta}{r}\mathbf{e}_\theta$.

296. $\mathbf{a} = \cos\varphi\sin\theta\mathbf{e}_r + \cos\varphi\cos\theta\mathbf{e}_\theta - \sin\varphi\mathbf{e}_\varphi$.

297. $\mathbf{a} = e^r\sin\theta\mathbf{e}_r + \dfrac{1}{r}e^r\cos\theta\mathbf{e}_\theta + \dfrac{2\varphi}{(1+\varphi^2)r\sin\theta}\mathbf{e}_\varphi$.

7°. Вычисление линейного интеграла и циркуляции векторного поля в криволинейных координатах. Пусть векторное поле

$$\mathbf{a}(M) = a_1(q_1,q_2,q_3)\mathbf{e}_1 + a_2(q_1,q_2,q_3)\mathbf{e}_2 + a_3(q_1,q_2,q_3)\mathbf{e}_3$$

определено и непрерывно в области Ω изменения ортогональных криволинейных координат q_1, q_2, q_3.

Дифференциал $d\mathbf{r}$ радиуса-вектора $\mathbf{r}$ любой точки $M(q_1,q_2,q_3)\in\Omega$, как известно, равен (см. § 23, (8))

$$d\mathbf{r} = H_1\,dq_1\mathbf{e}_1 + H_2\,dq_2\mathbf{e}_2 + H_3\,dq_3\mathbf{e}_3.$$

Поэтому линейный интеграл вектора $\mathbf{a}(M)$ по ориентированной гладкой или кусочно гладкой кривой $L\subset\Omega$ будет равен

$$\int\limits_L(\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int\limits_L a_1H_1\,dq_1 + a_2H_2\,dq_2 + a_3H_3\,dq_3. \tag{12}$$

В частности, для цилиндрических координат $q_1=\rho$, $q_2=\varphi$, $q_3=z$ будем иметь

$$\mathbf{a} = a_\rho(\rho,\varphi,z)\mathbf{e}_\rho + a_\varphi(\rho,\varphi,z)\mathbf{e}_\varphi + a_z(\rho,\varphi,z)\mathbf{e}_z,$$

$$d\mathbf{r} = d\rho\mathbf{e}_\rho + \rho\, d\varphi\mathbf{e}_\varphi \quad dz\mathbf{e}_z$$

поэтому

$$\int\limits_L (\mathbf{a}\ d\mathbf{r}) = \int\limits_L a_\rho\, d\rho + a_\varphi \rho\, d\varphi + a_z\, dz, \qquad (13)$$

для сферических координат $q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \varphi$ будем иметь

$$\mathbf{a} = a_r(r\ \theta,\varphi)\mathbf{e}_r + a_\theta(r\ \theta\ \varphi)\mathbf{e}_\theta \quad a_\varphi(r\ \theta,\varphi)\mathbf{e}_\varphi,$$

$$d\mathbf{r} = dr\mathbf{e}_r \quad r\, d\theta\mathbf{e}_\theta \quad r\sin\theta\, d\varphi\mathbf{e}_\varphi$$

и следовательно,

$$\int\limits_L (\mathbf{a}\ d\mathbf{r}) = \int\limits_L a_r\, dr + ra_\theta\, d\theta + ra_\varphi \sin\theta\, d\varphi \qquad (14)$$

Замечание. Циркуляция $Ц$ векторного поля $\mathbf{a}(M)$ в криволинейных координатах q q q_3 вычислится в общем случае по формуле (12) а в случае цилиндрических или сферических координат она вычисляется по формуле (13) или (14) соответственно

Пример 10. Вычислить линейный интеграл от векторного поля, заданного в цилиндрических координатах $\mathbf{a} = 4\rho\sin\varphi\mathbf{e}_\rho \quad ze^\rho\mathbf{e}_\varphi + (\rho+\varphi)\mathbf{e}$ вдоль прямой L: $\left\{\varphi = \frac{\pi}{4}\quad z = 0\right\}$ от точки $O\left(0, \frac{\pi}{4}, 0\right)$ до точки $A\left(1\ \frac{\pi}{4}, 0\right)$

Решение. В данном примере

$$a_\rho \quad 4\rho\sin\varphi, \quad a_\varphi = ze^\rho, \quad a \quad \rho+\varphi$$

По формуле (13) искомый линейный интеграл

$$\int\limits_L (\mathbf{a}\ d\mathbf{r}) \quad \int\limits_L 4\pi\sin\varphi\, d\rho \quad \rho ze^\rho\, d\varphi \quad (\rho+\varphi)\, dz$$

На прямой L имеем

$$\varphi = \frac{\pi}{4}, \quad d\varphi \quad 0 \quad z \quad 0 \quad dz = 0. \quad 0 \leqslant \rho \leqslant 1$$

Поэтому

$$\int\limits_L (\mathbf{a}\ d\mathbf{r}) = \int\limits_L 2\sqrt{2}\rho\, d\rho \quad \sqrt{2}\int\limits^1 2\rho\, d\rho = \sqrt{2} \qquad \triangleright$$

Пример 11. Вычислить линейный интеграл от векторного поля заданного в сферических координатах $\mathbf{a} = e^r\sin\theta\mathbf{e}_r \quad 3\theta^2\sin\varphi\mathbf{e}_\theta \quad r\varphi\theta\mathbf{e}_\varphi$ вдоль линии L: $\left\{r = 1\quad \varphi = \frac{\pi}{2}\quad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$ в направлении от точки $M_0\left(1\ 0\ \frac{\pi}{2}\right)$ до точки $M\left(1\ \frac{\pi}{2}\ \frac{\pi}{2}\right)$ (рис 40).

Решение. Линия L есть дуга окружности с центром в начале координат и радиусом $R = 1$, расположенная в плоскости yOz. Координаты данного вектора равны

$$a_r = e^r \sin\theta, \quad a_\theta = 3\theta^2 \sin\varphi, \quad a_\varphi = r\varphi\theta.$$

В силу формулы (14) линейный интеграл имеет вид

$$\int\limits_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int\limits_L e^r \sin\theta \, dr + 3\theta^2 r \sin\varphi \, d\theta + r^2 \varphi\theta \sin\theta \, d\varphi.$$

Учитывая, что на линии L выполняются условия

$$r = 1, \quad dr = 0, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad d\varphi = 0, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2},$$

получим

$$\int\limits_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int\limits_L 3\theta^2 \, d\theta = \int\limits_0^{\pi/2} 3\theta^2 \, d\theta = \frac{\pi^3}{8}. \quad \triangleright$$

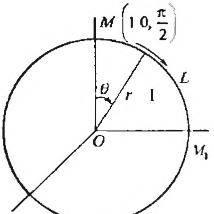

Рис. 40

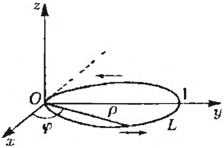

Рис. 41

Пример 12. Вычислить циркуляцию векторного поля, заданного в цилиндрических координатах: $\mathbf{a} = \rho \sin\varphi \, \mathbf{e}_\rho + \rho z \mathbf{e}_\varphi + \rho^3 \mathbf{e}_z$, по кривой L: $\{\rho = \sin\varphi, \; z = 0, \; 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi\}$ непосредственно и по теореме Стокса.

Решение. Координаты данного вектора

$$a_\rho = \rho \sin\varphi, \quad a_\varphi = \rho z, \quad a_z = \rho^3.$$

Контур L представляет собой замкнутую кривую, расположенную в плоскости $z = 0$ (рис. 41).

1) Непосредственное вычисление циркуляции.

Подставляя координаты данного вектора в формулу (13), получим

$$Ц = \oint\limits_L \rho \sin\varphi \, d\rho + \rho^2 z \, d\varphi + \rho^3 \, dz.$$

На кривой L имеем

$$z = 0,\ dz = 0, \quad \rho = \sin\varphi,\ d\rho = \cos\varphi\, d\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$$

Поэтому искомая циркуляция будет равна

$$Ц = \oint_L \rho \sin\varphi\, d\rho = \int_0^\pi \sin^2\varphi \cos\varphi\, d\varphi = 0.$$

2) Вычисление циркуляции с помощью теоремы Стокса

По теореме Стокса искомая циркуляция равна

$$Ц = \oint_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \iint_S (\operatorname{rot}\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)\, dS,$$

где S — поверхность, натянутая на контур L

Находим ротор данного поля

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \mathbf{e}_\rho & \rho\mathbf{e}_\varphi & \mathbf{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial\rho} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \rho\sin^2\varphi & \rho^2 z & \rho^3 \end{vmatrix} = -\rho\mathbf{e}_\rho - 3\rho^2\mathbf{e}_\varphi + (2z - \cos\varphi)\mathbf{e}_z.$$

В точках, где $\rho = 0$, значение $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ доопределяем по непрерывности полагая

$$\operatorname{rot}\mathbf{a}(0, \varphi, z) = (2z - \cos\varphi)\mathbf{e}_z.$$

Таким образом, $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ определен во всем трехмерном пространстве. Так как кривая L лежит в плоскости $z = 0$, то в качестве поверхности S, натянутой на эту кривую возьмем часть плоскости $z = 0$, ограниченной кривой L Тогда за орт нормали $\mathbf{n}^0$ к поверхности S можно взять орт $\mathbf{e}_z$, т е $\mathbf{n}^0 = \mathbf{e}_z$. Находим скалярное произведение.

$$(\operatorname{rot}\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) = (-\rho\mathbf{e}_\rho - 3\rho^2\mathbf{e}_\varphi + (2z - \cos\varphi)\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_z) = 2z - \cos\varphi,$$

так как в силу ортонормированности базиса $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_z$ имеем

$$(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_z) = (\mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z) = 0, \quad (\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_z) = 1$$

Искомая циркуляция равна

$$Ц = \iint_S (2z - \cos\varphi)\, dS.$$

Учитывая, что $z = 0$ на S и элемент площади dS координатной поверхности $z = 0$ равен

$$dS = \rho\, d\rho\, d\varphi$$

окончательно получим

$$Ц = -\iint_S \cos\varphi\, dS = -\iint_S \cos\varphi\ \rho\, d\rho\, d\varphi =$$

$$= -\int_0^\pi \cos\varphi\, d\varphi \int_0^{\sin\varphi} \rho\, d\rho = -\frac{1}{2}\int_0^\pi \sin^2\varphi\cos\varphi\, d\varphi = 0 \qquad \triangleright$$

Пример 13. Вычислить циркуляцию векторного поля, заданного в сферических координат: $\mathbf{a} = r\mathbf{e}_r + (R + r)\sin\theta\mathbf{e}_\varphi$, по окружности L: $\left\{r = R,\ \theta = \dfrac{\pi}{2}\right\}$ в направлении возрастания угла φ непосредственно и по теореме Стокса.

Решение. В данном примере

$$a_r = r \quad a_\theta = 0, \quad a_\varphi = (R + r)\sin\theta.$$

1) Непосредственное вычисление циркуляции

По формуле (14) искомая циркуляция равна

$$Ц = \oint\limits_L r\,dr + (R + r)\sin\theta\ r\sin\theta\,d\varphi = \oint\limits_L r\,dr + r(R + r)\sin^2\theta\,d\varphi.$$

На данной окружности L, центр которой находится в начале координат имеем

$$r = R, \quad dr = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{2} \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi,$$

и следовательно,

$$Ц = 2R^2 \oint\limits_L d\varphi = 2R^2 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi R^2.$$

2) Вычисление циркуляции по теореме Стокса.

Искомая циркуляция по теораме Стокса равна

$$Ц = \oint\limits_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \iint\limits_S (\operatorname{rot}\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)\,dS,$$

где dS — поверхность натянутая на окружность L.

Находим ротор данного вектора

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & r\sin\theta\mathbf{e}_\varphi \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} \\ r & 0 & (Rr + r^2)\sin^2\theta \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{2}{r}(R + r)\cos\theta\mathbf{e}_r - \frac{1}{r}(R + 2r)\sin\theta\mathbf{e}_\theta.$$

В качестве поверхности S, натянутой на окружность L, возьмем, например, верхнюю полусферу радиуса R: $r = R$, $0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Орт $\mathbf{n}^0$ нормали к внешней стороне полусферы S направлен по вектору $\mathbf{e}_r$ поэтому берем $\mathbf{n}^0 = \mathbf{e}_r$. Находим скалярное произведение

$$(\operatorname{rot}\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) = \left(\frac{2(R + r)}{r}\cos\theta\mathbf{e}_r - \frac{R + 2r}{r}\sin\theta\mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_r\right) = \frac{2(R + r)}{r}\cos\theta,$$

так как $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_r) = 1$, $(\mathbf{e}_r, \mathbf{r}_\theta) = 0$

Учитывая, что $r = R$ на поверхности S, для искомого потока получим выражение

$$\Pi = \iint\limits_S \frac{2(R - r)}{r} \cos\theta \, dS = 4 \iint\limits_S \cos\theta \, dS.$$

В сферических координатах элемент площади dS координатной поверхности $r = R$, т. е. полусферы S, будет равен

$$dS = R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

и, следовательно,

$$\Pi = 4 \iint\limits_S \cos\theta \cdot R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = 4R \int\limits_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta \, d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi R.$$

В силу теоремы Стокса получаем $Ц = 4\pi R^2$. ▷

В качестве поверхности S, натянутой на окружность L, можно было взять нижнюю полусферу, орт нормали которой $\mathbf{n}^0 = -\mathbf{e}_r$, результат будет тот же: $Ц = 4\pi R^2$.

Заметим, что за поверхность S, натянутую на окружность L, не следует брать круг, ограниченный этой окружностью, так как в этом круге имеется точка $r = 0$ (центр круга), в которой ротор данного вектора имеет разрыв.

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить линейный интеграл по данным линиям L от векторных полей, заданных в цилиндрических координатах.

298. $\mathbf{a} = z\mathbf{e}_\rho + \rho\varphi\mathbf{e}_\varphi + \cos\varphi\mathbf{e}_z$; L — отрезок прямой: $\{\rho = a, \varphi = 0, 0 \leqslant z \leqslant 1\}$.
299. $\mathbf{a} = \rho\mathbf{e}_\rho + 2\rho\varphi\mathbf{e}_\varphi + z\mathbf{e}_z$; L — полуокружность $\{\rho = 1, z = 0, 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi\}$.
300. $\mathbf{a} = e^\rho \cos\varphi\mathbf{e}_\rho + \rho\sin\varphi\mathbf{e}_\varphi + \rho\mathbf{e}_z$; L — виток винтовой линии: $\{\rho = R, z = \varphi, 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\}$.

Вычислить линейный интеграл по данной линии L от векторных полей, заданных в сферических координатах.

301. $\mathbf{a} = e^r \cos\theta\mathbf{e}_r + 2\theta\cos\varphi\mathbf{e}_\theta + \varphi\mathbf{e}_\varphi$; L — полуокружность: $\{\rho = 1, \varphi = 0, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\}$.

302. $\mathbf{a} = 4r^3 \operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}\mathbf{e}_r + \theta\varphi\mathbf{e}_\theta + \cos^2\varphi\mathbf{e}_\varphi$; L — отрезок прямой $\left\{\varphi = \dfrac{\pi}{2}, \theta = \dfrac{\pi}{4}, 0 \leqslant r \leqslant 1\right\}$.

303. $\mathbf{a} = \sin^2\theta\mathbf{e}_r + \sin\theta\mathbf{e}_\theta + r\varphi\theta\mathbf{e}_\varphi$; L — отрезок прямой: $\left\{\varphi = \dfrac{\pi}{2}, r = \dfrac{1}{\sin\theta}, \dfrac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right\}$.

Вычислить циркуляцию векторных полей, заданных в цилиндрических координатах, по данным контурам непосредственно и с помощью теоремы Стокса.

304. $\mathbf{a} = z\mathbf{e}_\rho + \rho z\mathbf{e}_\varphi + \rho\mathbf{e}_z$; L — окружность: $\{\rho = 1, z = 0\}$.

305. $\mathbf{a} = \rho\sin\varphi\,\mathbf{e}_\rho - \rho^2 z\,\mathbf{e}_\varphi + \rho\,\mathbf{e}_z$, L — окружность $\{\rho = R,\ z = R\}$.
306. $\mathbf{a} = z\cos\varphi\,\mathbf{e}_\rho + \rho\,\mathbf{e}_\varphi - \varphi\,\mathbf{e}_z$, L — петля $\{\rho = \sin\varphi,\ z = 1\}$.

Вычислить циркуляцию векторных полей, заданных в сферических координатах, по данным контурам L непосредственно и с помощью теоремы Стокса.

307. $\mathbf{a} = r\theta\,\mathbf{e}_r + r\sin\varphi\,\mathbf{e}_\varphi$, L — окружность $\left\{r = 1,\ \theta = \frac{\pi}{4}\right\}$.

308. $\mathbf{a} = r\sin\theta\,\mathbf{e}_r + \theta e^{\theta}\mathbf{e}_\theta$, L — петля $\left\{r = \sin\varphi,\ \theta = \frac{\pi}{2},\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi\right\}$.

309. $\mathbf{a} = r\varphi\theta\,\mathbf{e}_\varphi$, L — контур, ограниченный полуокружностью $\left\{r = R,\ \varphi = \frac{\pi}{4},\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\right\}$ и ее вертикальным диаметром $\left\{\varphi = \frac{\pi}{2},\ \theta = 0\right\}$.

§ 25. Оператор Лапласа в ортогональных координатах

Если $u = u(q_1, q_2, q_3)$ — скалярная функция, то

$$\operatorname{grad} u = \frac{1}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\mathbf{e}_2 + \frac{1}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\mathbf{e}_3. \tag{1}$$

Если

$$\mathbf{a} = a_1(q_1, q_2, q_3)\mathbf{e}_1 + a_2(q_1, q_2, q_3)\mathbf{e}_2 + a_3(q_1, q_2, q_3)\mathbf{e}_3,$$

то

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(a_1H_2H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(a_2H_3H_1) + \frac{\partial}{\partial q_3}(a_3H_1H_2)\right]. \tag{2}$$

Используя формулы (1) и (2), для оператора Лапласа Δu получим следующее выражение:

$$\Delta u = \operatorname{div}\operatorname{grad} u = \frac{1}{H_1H_2H_3}\times$$
$$\times\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_1H_3}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\right)\right].$$

В цилиндрических координатах

$$\Delta u = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] =$$
$$= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

В сферических координатах

$$\Delta u = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$$

Пример 1. Найти все решения уравнения Лапласа $\Delta u = 0$, зависящие только от расстояния r.

Решение. Записывая уравнение Лапласа в сферических координатах и учитывая сферическую симметрию решения (оно не должно зависеть от θ и φ), будем иметь

$$\Delta u \equiv \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) = 0 \quad (u = u(r))$$

Отсюда

$$r^2\frac{\partial u}{\partial r} = C_1,$$

так что

$$u = \frac{C_1}{r} + C_2,$$

где C_1, C_2 — постоянные. ▷

Задачи для самостоятельного решения

310. Дано скалярное поле $u = u(M)$ в цилиндрических координатах

$$u(\rho, \varphi, z) = \rho^2\varphi + z^2\varphi + z^2\varphi^3 - \rho\varphi z.$$

Найти Δu.

311. Дано скалярное поле $u = u(M)$ в сферических координатах

$$u(r, \theta, \varphi) = r^2\varphi\theta + r^3\varphi^2 + \varphi + \theta^2.$$

Найти Δu.

312. Являются ли гармоническими следующие функции:
1) $u = \rho^2\cos 2\varphi$; 2) $u = r\cos 2\theta$.

313. Найти всевозможные гармонические функции:
1) зависящие только от θ; 2) зависящие только от φ (в сферической системе координат).

314. Найти все решения уравнения Пуассона

$$\Delta u = r^{n-1}$$

в сферической системе координат, если $u = u(r)$.

Ответы

1. а) Полупрямая $\{x = 2,\ y = -z\ (y \geqslant 0,\ z \geqslant 0)\}$, проходимая дважды при $-\infty \leqslant t \leqslant \infty$,

б) При $t \in (-\infty, -1) \bigcup (-1, +\infty)$, точка $\mathbf{r}(t) = \frac{t^2+1}{(t+1)^2}\mathbf{i} + \frac{2t}{(t+1)^2}\mathbf{j}$ дважды пробегает полупрямую $\left\{x + y = 1\ \left(x \geqslant \frac{1}{2},\ y \leqslant \frac{1}{2}\right)\right\}$

в) $x^2 + y^2 = 1,\ z = 1$, г) $y = \frac{x^2}{3},\ z = \frac{x^3}{9}$ д) $x^2 + y^2 - z^2 = 1,\ x - y = 0$.

7. $\mathbf{i} + \mathbf{k}$ **8.** $\mathbf{i} + \mathbf{k}$. **9.** $-\mathbf{j} + \frac{1}{2\pi}\mathbf{k}$ **10.** $-\mathbf{i} + \mathbf{k}$

11. $e\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ **12.** Нет. **14.** Нет.

17. а) $2\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}, \mathbf{r}\right)$ б) $\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|^2 + \left(\mathbf{r}, \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)$, в) $\left[\mathbf{r}, \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right]$

21. Окружности, лежащие в плоскостях, перпендикулярных к вектору $\mathbf{a}$

22. Годограф скорости — винтовая линия $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = 2bt$, годограф ускорения — окружность $x = -a\sin t,\ y = a\cos t,\ z = 2b$

26. $\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{d\mathbf{a}}{du}\frac{du}{dt};\quad \frac{d^2\mathbf{a}}{dt^2} = \frac{d^2\mathbf{a}}{du^2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \frac{d\mathbf{a}}{du}\frac{d^2u}{dt^2}$

28. $(t-1)e^t\mathbf{i} + \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\mathbf{j} - \operatorname{arctg} t\,\mathbf{k} + \mathbf{c}$.

29. $\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\mathbf{i} + \frac{1}{2}e^{t^2}\mathbf{j} + \sin t\,\mathbf{k} + \mathbf{c}$ **30.** $e^{\sin t}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\sin t^2\mathbf{j} + t\mathbf{k} + \mathbf{c}$.

31. $\frac{t^3}{6}\mathbf{i} + (t\cos t - \sin t)\mathbf{j} + \frac{2^t}{\ln 2}\mathbf{k} + \mathbf{c}$. **32.** $\frac{2}{3}\mathbf{j} + \pi\mathbf{k}$

33. $(1 - e^{-1/2})\mathbf{i} + (e^{1/2} - 1)\mathbf{j} + (e-1)\mathbf{k}$ **34.** $-\ln 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

35. $2\pi^2\mathbf{i} + \pi\mathbf{j} + \pi^2\mathbf{k}$. **36.** $R = \frac{\sqrt{2}}{|\sin t|}$ **37.** $R = \frac{2}{3}|t|(1+9t^2)^{3/2}$

38. $R = 6$. **39.** $R = \frac{1}{2}a\pi$ **40.** $R = 2a\operatorname{ch}^2 t$.

41. $x + y = 0$ **42.** $x - y - \sqrt{2}z = 0$ **43.** $\frac{1}{T} = \frac{1}{3}$

44. $\frac{1}{T} = \frac{1}{2a\operatorname{ch}^2 t}$.

45. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16}$ — семейство трехосных эллипсоидов.

46. $x^2 + y^2 - z = C$ — семейство параболоидов.

47. $x^2 + y^2 = Cz\ (z \neq 0)$ — семейство параболоидов.

48. $2y^2 + 9z^2 = C$ — семейство эллиптических цилиндров.

49. $x + 2y - z = C$ — семейство параллельных плоскостей

50. Семейство плоскостей получающееся из пучка плоскостей $a_1x+a_2y+a_3z = C(b_1x + b_2y + b_3z)$, проходящих через прямую

$$\begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z = 0 \\ b_1x + b_2y + b_3z = 0 \end{cases}$$

путем исключения самой этой прямой. Здесь a_1, a_2, a_3 — координаты вектора **a**, b_1, b_2, b_3 — координаты вектора **b**.

51. $x^2 + y^2 + z^2 = C^2$ — семейство концентрических сфер.

52. (**a**, **b**, **r**) $= C$ или $\begin{vmatrix} x & y & z \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = C$ — семейство параллельных плоскостей.

53. $2x - y = C$ — семейство параллельных прямых.

54. $y = Cx$ $(C > 0,\ x \neq 0)$ — семейство лучей.

55. $y = Cx^2$ — семейство парабол с исключенной вершиной $O(0, 0)$.

56. $x^2 - y^2 = C$ — семейство гипербол.

57. $y = x \ln C$, C $(C > 0)$ — семейство прямых.

58. $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. **59.** $\dfrac{\sqrt{21}}{3}$. **60.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}e^3$. **61.** $\dfrac{2}{5}$.

62. $\dfrac{3}{5}\sqrt{2}$. **63.** $\dfrac{}{4}$. **64.** 0. **65.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}(\sqrt{2} \quad 3)$.

66. 0. **67.** 2. **68.** $\dfrac{\pi a^2}{a \quad R}$. **69.** $\dfrac{2}{3}(\mathbf{i} \quad \mathbf{j} \quad \mathbf{k})$.

70. **k**. **71.** $\varphi = \pi$. **72.** $\varphi = 0$. **73.** $\varphi = 0$.

74. $y = -x$, $2n\pi$, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ **75.** $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

78. $\dfrac{\mathbf{r}}{r}$. **79.** **a**. **80.** **a**(**b**, **r**) + **b**(**a**, **r**).

81. 2|**a**|^2**r** $-$ 2(**a**, **r**)**a**. **86.** $\dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{2u}{r}$.

87. $\dfrac{\partial u}{\partial l} = \dfrac{\cos(\widehat{\mathbf{r}, \mathbf{l}})}{r}$, $\dfrac{\partial u}{\partial l} = 0$ при $\mathbf{r} \perp \mathbf{l}$.

88. $\dfrac{\partial u}{\partial l} = \dfrac{1}{r^2}$. **89.** $\dfrac{\partial u}{\partial l} = 1$.

90. $\dfrac{\partial u}{\partial l} = \dfrac{(\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v)}{|\operatorname{grad} v|}$, $\dfrac{\partial u}{\partial l} = 0$, если $\operatorname{grad} u \perp \operatorname{grad} v$.

91. а) $\max \dfrac{\partial u}{\partial l} = \operatorname{grad} u(M_0) = 1$ в направлении оси Oy.

б) $\max \dfrac{\partial u}{\partial l} = |\operatorname{grad} u(M_0)| = 3$ в направлении вектора $\mathbf{a} = -\mathbf{i} \quad 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

92. $\begin{cases} y = xC_1 \\ z = xC_2 \end{cases}$ **93.** $\begin{cases} y = \dfrac{a_2}{a_1}x + C_1 \\ z = \dfrac{a_3}{a_1}x + C_2 \end{cases}$ **94.** $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = C_1^2, \\ x + y + z = C_2 \end{cases}$

95. $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{z} = \ , \quad \dfrac{1}{x} \quad \dfrac{}{2y^2} = 4$. **96.** $x^2 = C_1 y$, $z = C_2$.

97. $z = C_1x$, $y = C_2$. **98.** $xy = C_1$, $z = C_2$.

99. $x = C_1$, $2y^2 \quad z^2 = C_2$. **100.** $\dfrac{1}{x} \quad \dfrac{1}{y} = C_1$, $z = C_2$.

101. $y + z \; C \quad x = C_2$ **102.** $x \; C\,y \quad x \; C\,z$

103. $\begin{cases} \dfrac{x}{b_0} \; \dfrac{y}{b_0} + C \\ \dfrac{x}{b_{01}} = \dfrac{}{b_{03}} \; C \end{cases}$ где $b_0 \; b_{02} \; b_{03}$ — координа ы вектора $\mathbf{b}_0$

104. $\Pi \; -3$ **105.** $\Pi \; \pi R\,\gamma$ **106.** $\Pi \; R\,h$ **107** $\Pi - 4\pi R^3 f(R)$

108. $\Pi \; \dfrac{a}{2}$ **109.** $\Pi \; \dfrac{}{6}$ **110** $\Pi = \dfrac{1}{2}\pi R^2 h$ **111** $\Pi - \pi h^3$

112. $\Pi = \dfrac{81}{8}\pi$ **113.** $\Pi \; \dfrac{\pi}{4}$ **114.** $\Pi = 0$ **115.** $\Pi = \dfrac{}{2}$

116. $\Pi \; \dfrac{1}{4}$ **117.** $\Pi - 4\pi R$

118. а) $\Pi \; \dfrac{7}{6}$ б) $\Pi \; \dfrac{1}{2}$ в) $\Pi \; -\pi$

119. $\Pi = 0$ **120.** $\Pi \; 6\pi R$ **121** $\Pi = 0$ **122.**

123. $\Pi = 0$ **124.** $\Pi \; \dfrac{2}{3}(\; - \dfrac{\sqrt{2}}{4})$

125. $\Pi = \dfrac{3}{8}R^4$ **126.** $\Pi - \sqrt{2}\pi$ **127** $\Pi \; 45\pi$ **128.** $\Pi \; -64\pi$

129. $\Pi - 0$ **130.** $\Pi - \pi$ **131.** $\psi(r) - \dfrac{C}{r}$ **132** $7r^4$

133. 0 **134.** 0 **135.** $\psi(z) \; C \qquad C - \text{const}$

136. $\Pi \; 4\pi R$ **137.** $\operatorname{div} E \; 0 \; (r \neq 0)$

143. 16π **144.** πH **145** $\dfrac{32}{3}\pi$ **146.** 0

147. $\dfrac{\pi}{3}$ **146.** 4π **149.** $\dfrac{9}{3}\pi$ **150.** $\dfrac{32}{3}\pi$

151. $2R$ **152.** $\dfrac{81}{8}\pi$ **153** -1 **154.** –

155. Соленоидальное **156.** Н соленоидальное **157.** Соленоидальное

159. $\varphi(r \; \dfrac{C}{r^3} \quad (r \neq 0 \; C \; \text{const})$ **161** $\dfrac{\frac{2}{2} \; r}{2}$

162. $\ln \dfrac{r}{r}$ **163** $\dfrac{1}{r} \quad \dfrac{l}{r}$ **164.** 0 **166.** $\dfrac{4}{3}R^2$

167. $\dfrac{41}{6}$ **168.** а) $-\dfrac{14}{15}$ б) $\dfrac{2}{3}$

169. 0 **170.** $\dfrac{5}{3}$ **171** $3\sqrt{3}$ **172.** $\dfrac{1}{35}$

173. $-\pi a$ **174** 1 **175.** -2π **176** $\dfrac{\pi R}{4}$

177 $\dfrac{4}{3}$ **179.** $2(z\mathbf{i} + x\mathbf{j} \; y\mathbf{k}$

180 $3(z^2 \; x\,)\mathbf{j}$ **181** $(x + y)\mathbf{k}$ **191.** $\omega \; \dfrac{}{2} \operatorname{rot} \mathbf{v} = -\dfrac{z}{2}\mathbf{j}$

193 $f(x \; z) = xz + x + \quad C, \quad C = \text{cons}$

195. 4π **196.** 4π **197.** $\dfrac{4}{3}$ **198** 2π

199. $\frac{28}{3}$ **200.** 729π **201.** 0 **202.** $-\sqrt{2}\pi$

203. $2\omega\pi a$. Указание: $v = \omega r$ **204.** $\mu = 1$ **205.** $\mu_c = 3$

206. Зависит **207.** Не зависит **208.** Зависит **209.** –

210. $\frac{4}{5}$ **211.** 0 **212.** $\frac{2}{3}$ **213.** $\frac{\pi}{2}$

214. $\frac{\ }{3}$ **216.** $\frac{\pi}{2}$. Указание: дополнить путь интегрирования L отрезком OA оси Ox

217. Нет **218.** Да **219.** Нет **220.** Да.

221. Нет **222.** Нет **223.** Да **228.** $\varphi = x^2yz$

227. $\varphi = x + xyz$ **228.** $\varphi = x^2y - y^2 + xz$

229. $\varphi = \ln|x + y + z|$ **230.** $\varphi = \operatorname{arctg}(xyz)$

231. $\varphi = r$ **232.** $\varphi = \ln r$ **233.** $\varphi = \frac{1}{3}r^3$

234. $\varphi = \alpha x + \beta y + \gamma z + C$, $C = \text{const}$

235. $\varphi = xy - yz - zx + C$ **236.** $\varphi = xy - e^z + C$

237. $\varphi = e^x \sin y + z + C$ **247.** а) Да; б) нет; в) да

249. $u = C_1 x + C_2$

250. $u = Ax^2 + Bxy - Ay^2$, A и B — любые

251. $u(x) = \begin{cases} \dfrac{x^n}{(n-1)n} + C_1 x + C_2, & \text{если } n \neq 1, \\ x \ln|x| + C_1 x + C_2, & \text{если } n = 1 \quad (x \neq 0) \end{cases}$

252. $I = \frac{-4}{15}\pi$ **253.** $I = -\frac{\pi}{3}$ **254.** $I = \frac{4}{3}\pi R$ **255.** $I = 0$

256. $\mathbf{b} = x\mathbf{j} + (y - x)\mathbf{k}$ **257.** $\mathbf{b} = (y^2 - 2xz)\mathbf{k}$

258. $\mathbf{b} = (e^x - xe^y)\mathbf{j}$ **259.** $\mathbf{b} = 3x^2\mathbf{j} + (2y - 6xz)\mathbf{k}$

260. $\mathbf{b} = -x(x - y^2)\mathbf{j} + (x^3 - y)\mathbf{k}$ **261.** $\mathbf{b} = -(xz^2 + yze^{x^2})\mathbf{j} - 2xyz\mathbf{k}$

262. $\mathbf{b} = \frac{1}{2}(-z\mathbf{j} + y\mathbf{k})$ **263.** $\mathbf{b} = -8yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + 7xy\mathbf{k}$

264. $\mathbf{b} = 2xy^2z\mathbf{i} - 3x^2yz\mathbf{j} + x^2y^2\mathbf{k}$ **265.** $\mathbf{b} = \frac{1}{x}\sin xz\mathbf{i} - \frac{1}{z}\sin xz\mathbf{k}$

266. $\mathbf{b} = \dfrac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{x^2 + y^2}z - \mathbf{k}$

267. а) $\rho = \varphi + C_1$, $\rho = z + C_2$; б) $\rho = -\dfrac{1}{\ln C_1\varphi}$, $\rho = C_2 z$; в) $\varphi = C_1$, $r = C_2 \sin^2\theta$

268. $\operatorname{grad} u = 2(\rho + \cos\varphi)\mathbf{e}_\rho - \left(2\sin\varphi + \frac{1}{\rho}e^z\cos\varphi\right)\mathbf{e}_\varphi - e^z\sin\varphi\,\mathbf{e}_z$

269. $\operatorname{grad} u = (\cos\varphi - 3^\rho\ln 3)\mathbf{e}_\rho + \left(\frac{z}{\rho}\sin 2\varphi - \sin\varphi\right)\mathbf{e}_\varphi + \sin^2\varphi\,\mathbf{e}_z$

270. $\operatorname{grad} u = 2r\cos\theta\,\mathbf{e}_r - r\sin\theta\,\mathbf{e}_\theta$

271. $\operatorname{grad} u = (6r\sin\theta + e^r\cos\varphi - 1)\mathbf{e}_r + 3r\cos\theta\,\mathbf{e}_\theta - \dfrac{e^r\sin\varphi}{r\sin\theta}\mathbf{e}_\varphi$

272. $\operatorname{grad} u = -\mu\left(\dfrac{2\cos\theta}{r^3}\mathbf{e}_r + \dfrac{\sin\theta}{r}\mathbf{e}_\theta\right)$

273. $\operatorname{div}\mathbf{a} = 2 + \frac{z}{\rho}\cos\varphi - e^\varphi\sin z$

274. $\operatorname{div}\mathbf{a} = \dfrac{\varphi}{\rho}\operatorname{arctg}\rho - \dfrac{\varphi}{1+\rho^2} - (z^2+2z)e^z$

275. $\operatorname{div}\mathbf{a} = 4r - \dfrac{2}{r}\cos^2\varphi\operatorname{ctg}\theta + \dfrac{1}{r(r^2+1)\sin\theta}$

276. $\operatorname{rot}\mathbf{a} = \dfrac{\cos 2\theta}{\sin\theta}\mathbf{e}_r - \left(2\cos\theta + \dfrac{\alpha\sin\varphi}{r\sin\theta}\right)\mathbf{e}_\theta - \dfrac{\alpha\sin\theta}{r}\mathbf{e}_\varphi$

277. $\operatorname{rot}\mathbf{a} = -\dfrac{\varphi}{r}\operatorname{ctg}\theta\mathbf{e}_r + \dfrac{\varphi}{r}\mathbf{e}_\theta + \dfrac{2\cos\theta}{r}\mathbf{e}_\varphi$

278. $\operatorname{rot}\mathbf{a} = -2\rho\mathbf{e}_\varphi + \dfrac{\sin\varphi}{\rho}\mathbf{e}_z$

281. 24π **282.** $\dfrac{1}{2}\pi$ **283.** 4π **284.** $\dfrac{2}{3}\pi R^3$

285. $4\pi R^4$ **286.** $-\dfrac{2}{3}R^3$ **287.** 48. Указание: записать уравнения поверхностей в сферических координатах.

288. $u = \rho + \varphi + z + C$ **289.** $u = \dfrac{1}{2}(\rho^2+\varphi^2+z^2)$

290. $u = \rho\varphi z + C$ **291.** $u = e^\rho\sin\varphi - z^2 + C$

292. $u = \rho\varphi\cos z + C$ **293.** $u = r\theta + C$

294. $u = r^2 + \varphi + \theta + C$ **295.** $u = \dfrac{1}{2}(r\varphi^2 + \theta^2) + C$

296. $u = r\cos\varphi\sin\theta + C$ **297.** $u = e^r\sin\theta + \ln(1+\varphi^2) + C$

298. 1 **299.** π^2 **300.** $2\pi R$ **301.** π^2

302. 1 **303.** $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} - 1$ **304.** 0 **305.** $-2\pi R^4$

306. π **307.** π **308.** 0 **309.** 0

310. $\Delta u = 4\varphi - \dfrac{\varphi z}{\rho} + \dfrac{6\varphi z^2}{\rho^2} + 2\varphi^3$

311. $\Delta u = 6\varphi\theta + 12r\varphi^2 + \dfrac{2}{r^2} + \varphi\operatorname{ctg}\theta + \dfrac{2\theta}{r^2}\operatorname{ctg}\theta + \dfrac{2r}{\sin^2\theta}$

312. 1) Да. 2) нет

313. 1) $u(\theta) = C \ln \operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}$, 2) $u(\varphi) = C_1\varphi + C_2$

314. $$u(r) = \begin{cases} \dfrac{r^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \dfrac{C}{r} + C_2, & n \neq -1, -2, \\ \ln r + \dfrac{C_1}{r} + C_2, & n = -1, \\ -\dfrac{\ln r}{r} + \dfrac{C}{r} + C_2 & n = -2 \quad (r \neq 0) \end{cases}$$

Приложение 1

Основные операции векторного анализа в ортогональных криволинейных координатах

I. Скалярное поле задано в ортогональных криволинейных координатах $u = u(q_1, q_2, q_3)$. Тогда

$$\operatorname{grad} u = \frac{1}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\mathbf{e}_2 + \frac{1}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\mathbf{e}_3.$$

Оператор Лапласа

$$\Delta u = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \times \left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2 H_3}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_1 H_3}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1 H_2}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\right)\right].$$

Частные случаи. а) Скалярное поле задано в цилиндрических координатах $u = u(\rho, \varphi, z)$. Тогда

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial \rho}\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{e}_z.$$

Оператор Лапласа

$$\Delta u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

б) Скалярное поле задано в сферических координатах $u = u(r, \theta, \varphi)$. Тогда

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi.$$

Оператор Лапласа

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\sin\theta\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

II. Векторное поле задано в ортогональных криволинейных координатах $\mathbf{a} = a_1(q_1, q_2, q_3)\mathbf{e}_1 + a_2(q_1, q_2, q_3)\mathbf{e}_2 + a_3(q_1, q_2, q_3)\mathbf{e}_3$. Тогда

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial(a_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(a_2 H_3 H_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial(a_3 H_1 H_2)}{\partial q_3}\right],$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{H_2 H_3}\mathbf{e}_1 & \dfrac{1}{H_3 H_1}\mathbf{e}_2 & \dfrac{1}{H_1 H_2}\mathbf{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial q_1} & \dfrac{\partial}{\partial q_2} & \dfrac{\partial}{\partial q_3} \\ a_1 H_1 & a_2 H_2 & a_3 H_3 \end{vmatrix}.$$

Частные случаи. а) Векторное поле задано в цилиндрических координатах: $\mathbf{a} = a_1(\rho, \varphi, z)\mathbf{e}_\rho + a_2(\rho, \varphi, z)\mathbf{e}_\varphi + a_3(\rho, \varphi, z)\mathbf{e}_z$. Тогда

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho a_1)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial a_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_3}{\partial z},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{\rho}\mathbf{e}_\rho & \mathbf{e}_\varphi & \dfrac{1}{\rho}\mathbf{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial \rho} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_1 & \rho a_2 & a_3 \end{vmatrix}.$$

б) Векторное поле задано в сферических координатах: $\mathbf{a} = a_1(r, \theta, \varphi)\mathbf{e}_r + a_2(r, \theta, \varphi)\mathbf{e}_\theta + a_3(r, \theta, \varphi)\mathbf{e}_\varphi$. Тогда

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(a_1 r^2)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial(a_2 \sin\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial a_3}{\partial \varphi},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{r^2 \sin\theta}\mathbf{e}_r & \dfrac{1}{r \sin\theta}\mathbf{e}_\theta & \dfrac{1}{r}\mathbf{e}_\varphi \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} \\ a_1 & r a_2 & a_3 r \sin\theta \end{vmatrix}.$$

Приложение 2

Элементы площадей координатных поверхностей

Координаты	Координатные поверхности	Элементы площадей
Общие q_1, q_2, q_3	$q_1 = C = \mathrm{const}$ $q_2 = C = \mathrm{const}$ $q_3 = C = \mathrm{const}$	$dS_1 = H_2(C, q_2, q_3)H_3(C, q_2, q_3)\, dq_2\, dq_3$ $dS_2 = H_1(q_1, C, q_3)H_3(q_1, C, q_3)\, dq_1\, dq_3$ $dS_3 = H_1(q_1, q_2, C)H_2(q_1, q_2, C)\, dq_1\, dq_2$
Цилиндрические $q_1 = \rho,\ q_2 = \varphi,$ $q_3 = z$	$\rho = C = \mathrm{const}$ $\varphi = C = \mathrm{const}$ $z = C = \mathrm{const}$	$dS = C\, d\varphi\, dz$ $dS = d\rho\, dz$ $dS = \rho\, d\rho\, d\varphi$
Сферические $q_1 = r,\ q_2 = \theta,$ $q_3 = \varphi$	$r = C = \mathrm{const}$ $\theta = C = \mathrm{const}$ $\varphi = C = \mathrm{const}$	$dS = C^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ $dS = r \sin C\, dr\, d\varphi$ $dS = r\, dr\, d\theta.$

Оглавление